கணிதம்

க.பொ.த (உயர்தரம்) கணிதம் கற்கத் தொடங்குவோருக்கான அடிப்படைப் பாடநெறி

கணிதத் திணைக்களம்
விஞ்ஞான தொழில்நுட்ப பீடம்
தேசிய கல்வி நிறுவகம்
மகரகம
இலங்கை

Design by: L L A K Liyanage

கணிதம்

க.பொ.த. (உயர்தரம்) கணிதம் கற்கத் தொடங்குவோருக்கான அடிப்படைப் பாடநெறி.

கணிதத்திணைக்களம்
விஞ்ஞான தொழில்நுட்ப பீடம்
தேசிய கல்வி நிறுவகம்
மகரகம
இலங்கை
2009

முகவுரை

“க.பொ.த (உயர்தரம்) கணிதம் கற்கத் தொடங்குவோருக்கான அடிப்படை பாடநெறி” என்னும் இந்நூல் க.பொ.த (உயர்தரம்) வகுப்பில் கணிதம் அல்லது இணைந்த கணிதத்தை ஒரு பாடமாக கற்க விரும்புவோரின் தேவையை நிவர்த்தி செய்யும் வகையில் ஆக்கப்பட்டுள்ளது.

இந்நூலில் அடிப்படைத் தத்துவங்கள் அனைத்தும் வலியறுத்தப்பட்டிருப்பதுடன் விருத்தி செய்யப்பட்டிருக்க வேண்டிய கணித எண்ணக்கருக்கள் தொடர்பாக விசேட கவனம் செலுத்தப்பட்டுள்ளதால், மாணவர்கள் போதிய விளக்கத்துடன் பயிற்சிகளில் ஈடுபட ஏதுவாகின்றது.

க.பொத. (சாதாரண தரம்) பரீட்சை முடிவுகளை எதிர்பார்க்கும் மாணவர்கள் சுயகற்றலுக்காக இந்நூலை பயன்படுத்தக் கூடியதாக ஆக்கப்பட்டுள்ளமை இந்நூலின் சிறப்பான அம்சங்களில் ஒன்றாகும்.

சுயகற்கையினை ஊக்குவிக்குமுகமாக பல்வேறு தீர்க்கப்பட்ட பிரச்சினங்களை உள்ளடக்கியிருப்பதுடன், அட்சர கணிதத்தில் கூடிய கவனம் செலுத்தப்பட்டிருப்பது இந்நூலின் விசேட அம்சமாகும்.

இருப்பினும், இந்நூல் மேலும் சிறப்புற அமைவதற்கு உதவும் ஆலோசனைகளையும், விமர்சனங்களையும் வரவேற்பதுடன், தொடர்ந்து வரும் பதிப்பின் போது அவை கருத்தில் கொள்ளப்படுமென்னபதையும் அறியத் தருகின்றோம்.

பணிப்பாளர்

கணிதத்துறை
விஞ்ஞான தொழில்நுட்ப பீடம்
தேசிய கல்வி நிறுவகம்
மகரகம

பணிப்பாளர் நாயகத்தின் செய்தி

கல்விப் பொதுத்தராதர சாதாரணதர பரீட்சையினை முடித்து, தமது படிப்பினை கல்விப் பொதுத்தராதர உயர்தர கணிதப் பிரிவில் கல்வியைத் தொடர விரும்புவோருக்காக, **“கணிதம் கற்கத் தொடங்குவோருக்கான அடிப்படை பாடநெறி”** எனும் இந்நூல் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது.

கல்விப் பொதுத்தராதர உயர்தர கணித பாடத்துக்கான அடிப்படை அறிவினையும், தன்னம்பிக்கையினையும் தருவது இந்நூலின் சிறப்பம்சமாகும். இந்நூலின் ஒவ்வொரு பாடப் பகுதியும், கலைத் திட்டத்திற்கமைவாகவும், அதனை வகைப்படுத்தும் வகையில் மிகுந்த கரிசனையுடனும் எழுத்தாளர்களால் எழுத்தப்பட்டுள்ளது.

இப்புத்தகம், ஆசிரியர்கள், மாணவர்களுக்கு மிகவும் பயனுடையதாக இருக்கும் என்பது எனது திடமான நம்பிக்கையாகும். கணிதத் திணைக்களம் இத்தகைய பயனுறுதியுடைய மேலும் பல நூல்களை எதிர்காலத்தில் வெளியிடுவார்கள் என நம்புகின்றேன்.

கலாநிதி உபாலி எம் சேதர
பணிப்பாளர் நாயகம்
தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
மகரகம

கணிதம்

அட்சரகணிதம்

1. ஈருறுப்பு விரிவு 01
2. காரணியாக்கல் 07
3. அட்சரகணிதப் பின்னங்கள். 17
4. சமன்பாடுகள். 25
5. சுட்டிகளும் ; மடக்கைகளும் 51
6. விகிதம், விகிதசமம். 59

கேத்திர கணிதம்

7. வட்டத்துடன் தொடர்புடைய செவ்வகங்கள். 67
8. பைதகரசின் தேற்றமும், அதன் விரிவாக்கங்களும்.70
9. இரு கூறாக்கித் தேற்றம் 76
10 பரப்பளவு (இயல்பொத்த முக்கோணிகள் 79
11. முக்கோணித் தொடர்புள்ள ஒரு புள்ளியில்
சந்திக்கும் நேர்கோடுகள். 82

அட்சரகணிதம்

1. ஈருறுப்பு விரிவு

பின்வரும் கோவைகளிற்கான விரிவுகளை நாம் க.பொ.த (சா/த) இல் கற்றுள்ளோம்.

$(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)^3, (a-b)^3$

மேலுள்ள கோவைகளுக்கான விரிவுகள் பின்வருமாறு பெறப்படுகின்றன.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a(a+b)+b(a+b)$$
$$= a^2+ab+ab+b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad \text{———} \quad (1)$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$
$$= a(a-b)-b(a-b)$$
$$= a^2-ab-ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \quad \text{———} \quad (2)$$

அல்லது

மேலுள்ள முடிவு (2)ஐ முடிவு (1)ஐப் பயன்படுத்தியும் பெறலாம்.

$$(a+b)^2 = [a+(-b)]^2$$

முடிவு (1)இல் ***b*** ஐ ***(-b)*** ஆல் மாற்றீடு செய்யும் போது,
அதாவது:-

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$[a+(-b)]^2 = a^2+2a(-b)+(-b)^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\
&= (a+b)\left(a^2+2ab+b^2\right) \\
&= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2) \\
&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3
\end{aligned}
$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad \text{———————} \quad (3)$$

$$
\begin{aligned}
(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 \\
&= (a-b)\left(a^2-2ab+b^2\right) \\
&= a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2) \\
&= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3
\end{aligned}
$$

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \quad \text{———————} \quad (4)$$

அல்லது

$(a-b)^3$ இற்கான விரிவானது முடிவு (3)இல் b இற்குப் பதிலாக *(-b)*ஐப் பிரதியிடுவதன் மூலமும் பெறப்படலாம்.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
\left[a+(-b)\right]^3 &= a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3 \\
(a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3
\end{aligned}
$$

மூன்று உறுப்புக்களின் நிறைவர்க்கக் கோவைக்கான சூத்திரம் $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$ ஆகும்.

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &= \left[(a+b)+c\right]^2 \\
&= (a+b)^2+2(a+b)c+c^2 \\
&= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 \\
(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac
\end{aligned}
$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

கீழ்வரும் உதாரணங்களில் மேலுள்ளமுடிவுகளைப் பயன்படுத்தி சுருக்குவோம்.

உதாரணம் 01

பின்வருவனவற்றை விரித்தெழுதுக.

(i) $(2x+3y)^2$ (ii) $(2xy-5z)^2$

(iii) $(3x+2y)^3$ (iv) $\left(ab-\frac{2}{c}\right)^3$

(v) $(a+b-c)^2$

(i) $$(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2\times 2x \times 3y + (3z)^2$$
$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

(ii) $$(2xy-5z)^2 = (2xy)^2 - 2\times 2xy \times 5z + (5z)^2$$
$$= 4x^2y^2 - 20xyz + 25z^2$$

(iii) $$(3x+2y)^3 = (3x)^3 + 3\times(3x)^2\times(2y) + 3\times 3x \times (2y)^2 + (2y)^3$$
$$= 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$$

(iv) $$\left(ab-\frac{2}{c}\right)^3 = (ab)^3 - 3(ab)^2\times\frac{2}{c} + 3(ab)\left(\frac{2}{c}\right)^2 - \left(\frac{2}{c}\right)^3$$
$$= a^3b^3 - \frac{6a^2b^2}{c} + \frac{12ab}{c^2} - \frac{8}{c^3}$$

(v) $$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + 2b(-c) + 2(-c)a$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$$

உதாரணம் 2

$a+b=4$; $ab=5$ எனத் தரப்படும் போது பின்வருவனவற்றின் பெறுமான-ங்களைக் காண்க.

(i) a^2+b^2 (ii) a^3+b^3

(i) $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

$a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab$

$= 4^2-2\times5$

$= 16-10$

$$a^2+b^2=6$$

(ii) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b^2+3ab^2+b^3$

$a^3+b^3 = (a+b)^3-3a^2b-3ab^2$

$a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$

$= 4^3-3\times5\times4$

$= 64-60$

$$a^3+b^3=4$$

பயிற்சி - 01

பின்வருவனவற்றின் விரிவுகளை எழுதுக.

(01) $(2a+3b)^2$ (02) $(3a+4b)^2$ (03) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

(04) $(2xy+5z)^2$ (05) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$ (06) $\left(x-\frac{1}{x}\right)$

(07) $\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)^2$ (08) $\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{b}\right)^2$ (09) $(4xy-3z)^2$

(10) $(a+2b)^3$ (11) $(2a-b)^3$ (12) $(3a+2b)^3$

(13) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$ (14) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$ (15) $(ab-2c)^3$

(16) $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^3$ (17) $\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{b}\right)^3$ (18) $(2xy-3z)^3$

(19) $(a+b+c)^2$ (20) $(a+b-c)^2$ (21) $(a-b+c)^2$

(22) $(a-b-c)^2$ (23) $(a-2b+c)^2$ (24) $(a-b-2c)^2$

(25) காரணி அறிவைப் பயன்படுத்திப் பெறுமானங் காண்க.

(i) 101^3 (ii) 198^3 (iii) 401^3 (iv) 999^3

(26) காரணி அறிவைப் பயன்படுத்திப் பெறுமானங் காண்க.

(i) $101^2+2\times101\times99\times+99^2$

(ii) $88^2-2\times88\times87\times+87^2$

(27) காரணி அறிவைப் பயன்படுத்திப் பெறுமானங் காண்க.

(i) $51^3+3\times51^2\times49+3\times51\times49^2+49^3$

(ii) $101^3-3\times101^2\times99+3\times101\times99^2-99^3$

(28) பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

(ii) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

(iii) $(a+b)^3+(a-b)^3=2a(a^2+3b^2)$

(iv) $(a+b)^3-(a-b)^3=2b(3a^2+b^2)$

(29) $x+\frac{1}{x}=a$ எனின் பின்வருவனவற்றின் பெறுமதிகளை a இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

(i) $x^2+\frac{1}{x^2}$ (ii) $x^3+\frac{1}{x^3}$

(30) $x-y=4,$ ஆயும் $xy=21$ ஆயும் இருப்பின் x^3-y^3 இன் மெறுமதியைக் கணிக்க.

(31) $x+y=\frac{1}{3}$ எனின் x^3+y^3+xy இன் பெறுமதியைக் கணிக்க

(32) $a-\frac{1}{a}=-5$ எனின் $a^3-\frac{1}{a^3}-200$ இன் பெறுமதியைக் கணிக்க.

(33) $\frac{x^2-1}{x}=4$ எனின் $\frac{x^6-1}{x^3}$ $=76$ எனக் காட்டுக.

(34) $\frac{a^2-1}{a}=2$ எனின் $\frac{a^6-1}{a^3}$ இன் பெறுமதியைக் கணிக்க.

(35) $a+b-3=0$ எனின் $a^3+b^3+9ab-26$ இன் பெறுமதியைக் கணிக்க.

(36) $a+b-7=0$ ஆயும் $ab=12$ ஆயும் இருப்பின் $a^3+b^3+4ab(a+b)$ இன் பெறுமதியைக் கணிக்க.

(37) $p=2q+4$ எனின் $p^3=8q^3+24pq+64$ எனக் காட்டுக.

(38) $a+b+c=0$ எனின் $a^3+b^3+c^3=3abc$ எனக் காட்டுக.

(39) $p+q=1+pq$ எனின் $p^3+q^3=1+p^3q^3$ எனக் காட்டுக.

(40) $ab(a+b)=p$ எனின் $a^3+b^3+3p=\frac{p^3}{a^3b^3}$ எனக் காட்டுக.

2. காரணியாக்கல்.

அட்சர கணிதக் கோவைகளைக் காரணியாக்குக.

2.1 மூவுறுப்பிகள்.

உதாரணம் :

(1) x^2-5x-6 (2) $2x^3-5x^2-3x$

(3) $3x^2-5xy-2y^2$

உதாரணம் 1- காரணியாக்குக. x^2-5x-6

$$x^2-5x-6$$
$$=x^2-6x+x-6$$
$$=x(x-6)+1(x-6)$$
$$=(x-6)(x+1)$$

உதாரணம் 2- காரணியாக்குக. $2x^3-5x^2-3x$

$$2x^3-5x^2-3x$$
$$=x\left(2x^2-5x-3\right)$$
$$=x\left[2x^2-6x+x-3\right]$$
$$=x\left[2x(x-3)+1(x-3)\right]$$
$$=x(x-3)(2x+1)$$

உதாரணம் 3- காரணியாக்குக.

$$=3x^2-5xy-2y^2$$
$$=3x^2-6xy+xy-2y^2$$
$$=3x(x-2y)+y(x-2y)$$

உதாரணம் 4- காரணியாக்குக. $2(x+3)^2-7(x+3)-4$

$x+3=a$ என்க

$$2(x+3)^2-7(x+3)-4$$
$$=2a^2-7a-4$$
$$=2a^2-8a+a-4$$
$$=2a(a-4)+1(a-4)$$
$$=(a-4)(2a+1)$$
$$=[(x+3-4)][2(x+3)+1]$$
$$=(x-1)(2x+7)$$

உதாரணம் 5- $2(2a+b)^2-5(2a+b)(a-2b)-3(a-2b)^2$

$x=2a+b, y=a-2b$ என்க

$$2(2a+b)^2-5(2a+b)(a-2b)-3(a-2b)^2$$
$$=2x^2-5xy-3y^2$$
$$=2x^2-6xy+xy-3y^2$$
$$=2x(x-3y)+y(x-3y)$$
$$=(x-3y)(2x+y)$$
$$=[(2a+b)-3(a-2b)][2(2a+b)+(a-2b)]$$
$$=[7b-a]5a$$
$$=5a(7b-a)$$

2.2 வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் (காரணியாக்கல்)

$$a^2-b^2$$
$$a^2-b^2=a^2-ab+ab-b^2$$
$$=a(a-b)+b(a-b)$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

உதாரணம் 1 காரணியாக்குக. a^3b-ab^3

$$a^3b-ab^3$$
$$=ab\left(a^2-b^2\right)$$
$$=ab\left(a-b\right)\left(a+b\right)$$

உதாரணம் 2 காரணியாக்குக x^4-1

$$x^4-1$$
$$=\left(x^2\right)^2-1^2$$
$$=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$$
$$=\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)$$

உதாரணம் 3 காரணியாக்குக. a^4+4b^4

$$a^4+4b^4$$
$$=a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2$$
$$=\left(a^2+2b^2\right)^2-\left(2ab\right)^2$$
$$=\left(a^2+2b^2-2ab\right)-\left(a^2+2b^2-2ab\right)$$

உதாரணம் 4 காரணியாக்குக. $1-a^2+2ab-b^2$

$$1-a^2+2ab-b^2$$
$$=1-\left(a^2-2ab+b^2\right)$$
$$=1^2-\left(a-b\right)^2$$
$$=\left[1-\left(a-b\right)\right]\left[1+\left(a-b\right)\right]$$
$$=\left(1-a+b\right)\left(1+a-b\right)$$

2.3 a^3+b^3, a^3-b^3 என்பனவற்றை காரணியாக்கல்.

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$ இன் பெருக்கத்தைக் கருதுக.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$$
$$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$
$$=a^3+b^3$$

$$\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$(a-b)(a^2+ab+b^3)$ இன் பெருக்கத்தைக் கருதுக.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$=a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)$$
$$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$$
$$=a^3-b^3$$

$$\boxed{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

உதாரணம் 1 $81x^3-3y^3$ ஐக் காரணியாக்குக.

$$81x^3-3y^3$$
$$=3(27x^3-y^3)$$
$$=3\left[(3x)^3-y^3\right]$$
$$=3(3x-y)\left[(3x)^2+3x\times y+y^2\right]$$
$$=3(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$$

உதாரணம் 2 காரணியாக்குக $x^3+\frac{1}{x^3}$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-x\times\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)$$

உதாரணம் 3 காரணியாக்குக $x^3-\frac{1}{x^3}$

$$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+x\times\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$$

$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)$$

உதாரணம் 4 காரணியாக்குக $8a^3+(b+c)^3$

$$8a^3+(b+c)^3=(2a)^3+(b+c)^3$$

$$=\left[2a+(b+c)\right]\left[(2a)^2-2a(b+c)+(b+c)^2\right]$$

$$=(2a+b+c)\left(4a^2-2ab-2ac+b^2+2bc+c^2\right)$$

$$8a^3+(b+c)^3=(2a+b+c)\left(4a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc\right)$$

உதாரணம் 5 காரணியாக்குக $a^3-27(b-c)^3$

$$a^3-27(b-c)^3=a^3-\{3(b-c)\}^3$$

$$=\left[a-3(b-c)\right]\left[a^2+3a(b-c)+9(b-c)^2\right]$$

$$=(a-3b+3c)\left(a^2+9b^2+9c^2+3ab-3ac-18bc\right)$$

உதாரணம் 6

(i) காரணியாக்குக $(a+b)^3+c^3$

(ii) $(a+b)^3$ இன் விரிவை எழுதி

$a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$ எனக் காட்டுக.

(iii) மேலுள்ள முடிவுகளைப் பயன்படுத்தி $a^3+b^3+c^3-3abc$ ஐக் காரணியாக்குக.

(i) $(a+b)^3+c^3=\left[(a+b)+c\right]\left[(a+b)^2-c(a+b)+c^2\right]$

$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2+2ab-bc-ca\right)$

(ii) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^3-3a^2b-3ab^2=a^3+b^3$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3a(a+b)$

(iii) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$ - (ii)இல் இருந்து

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$

$=\left[(a+b)+c\right]\left[(a+b)^2-c(a+b)+c^2\right]-3ab(a+b+c)$ - ((ii)இல் இருந்து

$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2+2ab-ac-bc\right)-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$

பயிற்சி - 2 (a)

காரணியாக்குக.

(1) $x^2 - x - 6$

(2) $x^2 + 4x - 96$

(3) $x^2 + 5x - 6$

(4) $x^2 - 4x - 12$

(5) $x^2 + x - 42$

(6) $x^2 - 9x + 18$

(7) $2x^2 + 5x + 3$

(8) $2x^2 - 5x + 3$

(9) $2x^2 + 5x - 18$

(10) $2x^2 - 5x - 3$

(11) $10 - 7x - 12x^2$

(12) $15 + x - 2x^2$

(13) $8x^2 - 37x - 216$

(14) $6x^2 - 55x + 126$

(15) $2x^2 - 5xy + 3y^3$

(16) $6x^2 - 5xy - 6y^2$

(17) $4x^2 + 8xy + 3y^2$

(18) $2a^2 - 27ab + 13b^2$

(19) $40x^2 + 29xy + 3y^2$

(20) $32x^2 - 36xy - 35y^2$

(21) $24a^3 - 17a^2b - 20ab^2$

(22) $18a^3 - 3a^2b - 10ab^2$

(23) $\left(a^2 - 3a\right)^2 - 38\left(a^2 - 3a\right) - 80$

(24) $\left(a + b + c\right)^2 - 3\left(a + b + c\right) - 28$

(25) $2\left(x + y\right)^2 - 3\left(x + y\right) - 27$

(26) $2\left(2x + y\right)^2 - 5\left(2x + y\right)\left(x - 2y\right) + 3\left(x - 2y\right)^2$

(27) $x^2 + x - \left(a - 1\right)\left(a - 2\right)$

(28) $x^2 - x - \left(a - 1\right)\left(a - 2\right)$

(29) $x^2 - \left[a + \frac{1}{a}\right]x + 1$

(30) $x^2 + 2ax + \left(a + b\right)\left(a - b\right)$

(31) $ax^2 + \left(ab - 1\right)x - b$

(32) $x^2 + ax - \left(6a^2 - 5ab + b^2\right)$

(33) $4\left(a^2 - b^2\right)^2 - 8ab\left(a^2 - b^2\right) - 5a^2b^2$

(34) $10(a+2b)^2 + 21(a+2b)(2a-b) - 10(2a-b)^2$

(35) $6(x+y)^2 - 5\left(x^2 - y^2\right) - 6(x-y)^2$

பயிற்சி - 2 (b)

காரணியாக்குக.

(1) $x^2 - 4y^2$ (2) $x^3 - x$

(3) $x^2 - \frac{1}{x^2}$ (4) $x^5 - x$

(5) $4 - 9a^2$ (6) $(a-4b)^2 - 9b^2$

(7) $16 - (a+b)^2$ (8) $9 - (a-b)^2$

(9) $12a^3 - 3ab^2$ (10) $1 - (a-b)^2$

(11) $1 - (a+b)^2$ (12) $x^2 - y^2 + x - y$

(13) $x^2 - y^2 - x + y$ (14) $x^2 - y^2 + x + y$

(15) $x^2 - y^2 - x - y$ (16) $a^2 - b^2 + 4a + 4b$

(17) $a^2 - b^2 - 4a + 4$ (18) $ab + ac - (b+c)^2$

(19) $a(a+1) - b(b+1)$ (20) $x^4 - 3x^2y^2 + y^4$

(21) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ (22) $a^4 + 5a^2b^2 + 9b^4$

(23) $x^2 - 4xy + 4y^2 - z^2$ (24) $4a^2 + b^2 - x^2 + 4ab$

(25) $x^4 + x^2 + 1$ (26) $4a^4 + 11a^2b^2 + 9b^4$

காரணி அறிவைப் பயன்படுத்தி பெறுமானம் காண்க.

(1)	100^2-99^2	(2)	94^2-36
(3)	$12.38^2-7.62^2$	(4)	$6.2^2-3.8^2$
(5)	$100\times99+1$	(6)	$11.7\times9.3+8.3\times9.3$
(7)	$\sqrt{148\times140+16}$	(8)	$319^2-318\times320$
(9)	$12.5^2-13\times12$	(10)	103×97

பயிற்சி - (2c)

காரணியாக்குக.

(1)	a^3-8b^3	(2)	$27a^3-b^3$
(3)	$125a^3-64b^3$	(4)	$8a^3b^3-c^3$
(5)	$x^3+\frac{1}{x^3}$	(6)	$x^3-\frac{1}{x^3}$
(7)	$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}$	(8)	$\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}$
(9)	$a^3+(b+c)^3$	(10)	$a^3+(b-c)^3$
(11)	$a^3-(b-c)^3$	(12)	$8x^3+(2y-x)^3$
(13)	$(a+b)^3+(a-b)^3$	(14)	$(a+b)^3-(a-b)^3$
(15)	$8(a+b)^4+(a+b)$	(16)	x^6-y^6
(17)	x^6+y^6	(18)	x^6-27

(19) காரணியாக்குக. $(a+b)^3+c^3$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ எனக் காட்டுக.

மேலே உள்ள முடிவுகளைப் பயன்படுத்தி $a^3+b^3+c^3-3abc$ ஐ காரணியாக்குக.

இதிலிருந்து பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணியாக்குக.

(i) $x^3+y^3-z^3+3xyz$

(ii) $8x^3+y^3+z^3-6xyz$

(iii) $x^3+8y^3+27z^3-18xyz$

(iv) $a^3-28b^3-9ab^2$

(v) $8a^3+b^3-1+6ab$

(20) (i) $a=b+c$ எனின் $a^3-b^3-c^3=3abc$ எனக் காட்டுக.

(ii) $a+b+c=0$ எனின் $a^3+b^3+c^3=3abc$ எனக் காட்டுக.

(iii) $z=2x-3y$ எனின் $8x^3-27y^3=z^3+18xyz$ எனக் காட்டுக.

(21) $x+y+z=0$ எனத் தரப்படின் $x^3+y^3+z^3=3xyz$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து பின்வரும் பல்றுப்பிகளைக் காரணியாக்குக

(i) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

(ii) $(2x-3y)^3+(3y-4z)^3+8(2z-x)^3$

(iii) $b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3+a^3(b-c)^3$

(iv) $(x-3y)^3+(3y-4z)^3+(4z-x)^3$

3. அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்.

பொது மடங்குகளில் சிறியது. (பொ.ம.சி)

பல்லுறுப்பிகளை காரணிகளாக்குவதன் மூலம் பொ.ம.சியை இலகுவாகக் காணல்.

உதாரணம் 1

$8x^3, 12x^5, 18x^7$ என்பவற்றின் பொ.ம.சி யைக் காண்க.

$8x^3 = 2^3 \times x^3$

$12x^5 = 2^2 \times 3 \times x^5$

$18x^7 = 2 \times 3^2 \times x^7$

$\therefore$ பொ.ம.சி $= 2^3 \times 3^2 \times x^7 = 72x^7$

உதாரணம் 2

$2x^2 - 8,\ 3x^2 + 3x - 6,\ 6x^2 - 6x - 12$ என்பவற்றின் பொ.ம.சி. யைக் காண்க.

$2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x-2)(x+2)$

$3x^2 + 3x - 6 = 3(x^2 + x - 6) = 3(x+2)(x-1)$

$6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 2 \times 3(x-2)(x+1)$

$\therefore$ பொ.ம.சி $= 6(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$

அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சுருக்கல்.

உதாரணம் 1

$$\frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{(x-1)^2}$$

$x^2 - 1, (x-1)^2$ இன் பொ.ம.சி. ஐக் காண வேண்டும்.

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$(x-1)^2 = (x-1)^2$

$\therefore$ பொ.ம.சி $= (x-1)^2(x+1)$

$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{3}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{3}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2(x-1)-3(x+1)}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$=\frac{-x-5}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$=\frac{-(x+5)}{(x-1)^2(x+1)}$$

உதாரணம் 2

சுருக்குக.

$$\frac{2}{1+x}+\frac{1}{x-1}+\frac{3x}{1-x^2}$$

$$=\frac{2}{1+x}-\frac{1}{1-x}+\frac{3x}{1-x^2}$$

$$=\frac{2}{1+x}-\frac{1}{1-x}+\frac{3x}{(1-x)(1+x)}$$

$$=\frac{2(1-x)-(1+x)+3x}{(1-x)(1+x)}$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

உதாரணம் 3

$$\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+x-6}-\frac{2}{x^2+5x+6}$$

$$=\frac{1}{(x-2)(x+2)}+\frac{1}{(x+3)(x-2)}-\frac{2}{(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{(x+3)+(x+2)-2(x-2)}{(x-2)(x+2)(x+3)}$$

$$\frac{9}{(x-2)(x+2)(x+3)}$$

உதாரணம் 4

$$\frac{3x}{2-3x+x^2}+\frac{4}{1-x}-\frac{6}{2-x}$$

$$=\quad\frac{3x}{(2-x)(1-x)}+\frac{4}{1-x}-\frac{6}{2-x}$$

$$=\quad\frac{3x+4(2-x)-6(1-x)}{(2-x)(1-x)}$$

$$=\quad\frac{2+5x}{(2-x)(1-x)}$$

உதாரணம் 5

$$\frac{a+2}{(a-2)}+\frac{4}{4-a^2}-1$$

$$=\frac{a+2}{a-2}-\frac{4}{a^2-4}-1$$

$$=\frac{a+2}{a-2}-\frac{4}{(a-2)(a+2)}-1$$

$$=\frac{(a+2)^2-4-(a-2)(a+2)}{(a-2)(a+2)}$$

$$=\frac{a^2+4a+4-4-(a^2-4)}{(a-2)(a+2)}$$

$$=\frac{4(a+1)}{(a-2)(a+2)}$$

உதாரணம் 6 :

$$\frac{1}{4-\frac{3}{2+\frac{x}{(1-x)}}}$$

$$= \frac{1}{4-\frac{3}{\frac{2(1-x)+x}{1-x}}}$$

$$= \frac{1}{4-\frac{3}{\frac{2-x}{1-x}}}$$

$$= \frac{1}{4-\frac{3(1-x)}{2-x}}$$

$$= \frac{1}{\frac{4(2-x)-3(1-x)}{(2-x)}} \quad = \frac{1}{\frac{8-4x-3+3x}{2-x}}$$

$$= \frac{1}{\frac{5-x}{2-x}}$$

$$= \frac{2-x}{5-x}$$

உதாரணம் 7

சுருக்குக.

$$\frac{x^2-25}{x^2+3x-10}\times\frac{x^2-4}{x^2-3x-10}\times\frac{x-1}{x^2+3x}$$

$$=\quad\frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)(x-2)}\times\frac{(x-2)(x+2)}{(x-5)(x+2)}\times\frac{x-1}{x(x+3)}$$

$$=\quad\frac{x-1}{x(x+3)}$$

உதாரணம் 8

சுருக்குக.

$$\frac{x^2-3x+2}{(x-3)}\div\frac{x^2-1}{2x^2-6x}$$

$$=\quad\frac{x^2-3x+2}{(x-3)}\times\frac{2x^2-6x}{x^2-1}$$

$$=\quad\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}\times\frac{2x(x-3)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\quad\frac{2x(x-2)}{(x+1)}$$

உதாரணம் 9

சுருக்குக.

$x=\frac{1+y}{2y-1}$, $y=\frac{1+2z}{1-z}$ எனத் தரப்படின் z ஐ x இல் மட்டும் காண்க.

1ஆவது சமன்பாட்டில் $x=\frac{1+y}{2y-1}$, $y=\frac{1+2z}{1-z}$ ஐ பிரதியிட பெறப்படுவது

$$x=\frac{1+\frac{1+2z}{1-z}}{2\left(\frac{1+2z}{1-z}\right)-1}$$

$$=\frac{\frac{(1-z)+(1+2z)}{1-z}}{\frac{2(1+2z)-(1-z)}{1-z}}$$

$$x=\frac{\frac{2+z}{1-z}}{\frac{1+5z}{1-z}}$$

$$x=\frac{2+z}{1+5z}$$

$$x(1+5z)=2+z$$

$$x+5xz=2+z$$

$$z(5x-1)=2-x$$

$$z=\frac{2-x}{5x-1}$$

பயிற்சி - 3

சுருக்குக

(1) $\frac{x}{2x-6}+\frac{3}{6-2x}+\frac{x}{2}$

(2) $\frac{6}{x^2+2x-8}+\frac{7}{10-3x-x^2}$

(3) $\frac{3}{x^2+2x-15}-\frac{1}{x^2-x-6}-\frac{2}{x^2+7x+10}$

(4) $\frac{2x}{x^2+2x-3}+\frac{1}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-4x+3}$

(5) $x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^2-3x-2}{x^2-1}$

(6) $\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{2}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x^2-3x+2}$

(7) $\frac{1}{2x-1}-\frac{2x}{4x^2-1}-\frac{1}{2x^2-3x+1}$

(8) $\frac{a-2}{a^2-9a+20}-\frac{a+2}{a^2-a-12}$

(9) $\frac{a-2}{a+2}+\frac{a+2}{a-2}-\frac{a^2+4}{a^2-4}$

(10) $\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{2x^2-6x+4}+\frac{3}{2x^2-2x-4}$

(11) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(a-c)}+\frac{bc}{(c-a)(c-b)}$

(12) $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}-\frac{(a-b)^2}{(x-a)(x-b)}$

(13) $\frac{a^2+3a+2}{a^2-4a+12}\times\frac{a^2-7a+6}{a^2-4}$

(14) $\frac{a^3+b^3}{a(a^2-b^2)}\times\frac{a+b}{a-b}\times\frac{a^2-ab}{(a+b)^2}$

(15) $\dfrac{1}{a^2+ab+b^2}\times\dfrac{2a}{a^3+b^3}\times\dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{4a^2}$

(16) $\left(\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{a+1}{a}\right)\div\left(\dfrac{a}{a+1}-\dfrac{a-1}{a}\right)$

(17) $\left(2-\dfrac{y^2+z^2-x^2}{yz}\right)\div\left(2+\dfrac{x^2+y^2-z^2}{xy}\right)$

(18) $\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\div\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right)$

(19) $y=x+\dfrac{1}{x}$, $z=y-\dfrac{1}{y}$ எனின் z ஐ, x இன் உறுப்புக்களில் தருக.

(20) $y=\dfrac{1-t}{1+t}$ எனின் $\dfrac{1-y^2}{1+y^2}$ ஐ t இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

(21) $x=\dfrac{1+a}{1-a}$, $y=\dfrac{1-a}{1+a}$ எனின் $\dfrac{x-y}{1+xy}$ ஐ a யின் உறுப்புக்களில் தருக.

(22) $a=\dfrac{2b+1}{b-1}$, $b=\dfrac{c+1}{2c-1}$ எனின் $\dfrac{2a+1}{a-1}$ ஐ c யின் உறுப்புக்களில் தருக.

4 சமன்பாடுகள்.

1. ஒரு மாறியைக் கொண்ட சமன்பாடுகள்.

நாம் இவ்வத்தியாயத்தில் ஒரு மாறியைக் கொண்டுள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் பல்வேறு முறைகள் பற்றிக் கற்போம்.

(a) எளிய சமன்பாடுகள்.

உதாரணம் 1

$$\frac{3x+2}{x-1}-\frac{2(x-2)}{x+2}=1$$

இரு பக்கமும் பொ.ம.சி $(x-1)(x+2)$ ஆல் பெருக்குக.

$$(3x+2)(x+2)-2(x-2)(x-1)=(x-1)(x+2)$$
$$(3x^2+8x+4)-2(x^2-3x+2)=x^2+x-2$$
$$x^2+14x=x^2+x-2$$
$$13x=-2$$
$$x=\frac{-2}{13}$$

(b) இருபடிச் சமன்பாடுகள்.

இருபடிச் சமன்பாடு ஒன்றின் பொதுவான வடிவம். $ax^2+bx+c=o$ ஆகும். இங்கு a, b, c என்பன மெய் எண்களாகும். $a\neq o$

வாக்கபூர்த்தியாக்கல் முறை மூலம் $ax^2+bx+c=o$ என்ற $(a\neq o)$ இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்த்தல்.

$ax^2+bx+c=o \qquad a\neq o$

இங்கு $a\neq o$ ஆதலில் aஆல் இருபக்கமும் பிரிக்குக.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

இருபக்கமும் $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ஐக் கூட்டுக.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad , \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ஆகவே தரப்பட்ட சமன்பாட்டின் முலங்கள்.

$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, உம் $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ உம் ஆகும்.

உதாரணம் 2 பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(a) $4x^2-4x-3=0$

(b) $3x^2-5x-1=0$

(a) $4x^2-4x-3=0$

இச்சமன்பாட்டைக் காரணிப்படுத்தல் முறை மூலம் தீரக்கலாம்.

$$4x^2-4x-3=0$$

$$4x^2-6x+2x-3=0$$

$$2x(2x-3)+1(2x-3)=0$$

$$(2x-3)(2x+1)=0$$

$2x-3=0$ அல்லது $2x+1=0$

ஆகவே $x=\dfrac{3}{2}$ அல்லது $x=\dfrac{-1}{2}$

(b) $3x^2 - 5x - 1 = 0$ (வர்க்கபூர்த்தியாக்கல் முறை)

$3x^2 - 5x - 1 = 0$

$$x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{1}{3}$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{25}{36} = \frac{37}{36}$$

$$x - \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{37}}{6}$$

$$x = \frac{5+\sqrt{37}}{6} \quad \text{அல்லது} \quad x = \frac{5-\sqrt{37}}{6}$$

(c) இருபடிச் சமன்பாடுகளாக ஒடுக்கப்படக் கூடிய சமன்பாடுகள்.

உதாரணம் 3 தீர்க்க $\left(x^2+3x\right)^2 - 5\left(x^2+3x\right) - 6 = 0$

$y = x^2 + 3x$ எனப் பிரதியிடுக.

$$y^2 - 5y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (y-6)(y+1) = 0$$

$$\Rightarrow y = 6 \quad \text{அல்லது} \quad y = -1$$

$x^2 + 3x = 6$ அல்லது $x^2 + 3x = -1$

$x^2 + 3x - 6 = 0$ அல்லது $x^2 + 3x + 1 = 0$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+24}}{2}$ அல்லது $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$ அல்லது $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

எனவே மேலே தரப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு 4 தீர்வுகள் உண்டு.

$\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}$, $\dfrac{-3-\sqrt{33}}{2}$, $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ ஆகும்.

உதாரணம் 4

தீர்க்க.

$$\frac{4x+5}{x+5}+\frac{x+5}{4x+5}=\frac{10}{3}$$

$y=\frac{4x+5}{x+5}$ என்க.

எனவே, தரபப்ட்ட சமன்பாடு பின்வருமாறு அமையும்.

$$y+\frac{1}{y}=\frac{10}{3}$$

$\Rightarrow \quad 3y^2+3=10y$

$\Rightarrow \quad 3y^2-10y+3=0$

$\Rightarrow \quad (3y-1)(y-3)=0$

$y=\frac{1}{3}$ அல்லது $y=3$

$\frac{4x+5}{x+5}=\frac{1}{3}$ அல்லது $\frac{4x+5}{x+5}=3$

$12x+15=x+5$ அல்லது $4x+5=3x+15$

$11x=-10$ அல்லது $x=15-5$

$x=\frac{-10}{11}$ அல்லது $x=10$

எனவே தரப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\frac{-10}{11},10$ ஆகும்.

உதாரணம் 5

(a) $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+=0$ என்ற வடிவில் அமைந்த சமன்பாடுகள்.

தீர்க்க $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$

$x+\frac{1}{x}=y$ என்க

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2$

$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

தரப்பட்ட சமன்பாடு பின்வருமாறு அமையும்.

$6\left(y^2-2\right)+35y+62=0$

$6y^2+35y+50=0$

$\Rightarrow \quad (2y+5)(3y+10)=0$

$\Rightarrow \quad y=\frac{-5}{2}$ அல்லது $y=\frac{-10}{3}$

$x+\frac{1}{x}=\frac{-5}{2}$ அல்லது $x+\frac{1}{x}=\frac{-10}{3}$

$\Rightarrow 2x^2+5x+2=0$ அல்லது $3x^2+10x+3=0$

$(2x+1)(x+2)=0$ $\quad (3x+1)(x+3)=0$

$x=-2$ அல்லது $x=\frac{-1}{2}$ $\quad x=-3$ or $x=\frac{-1}{3}$

தரப்பட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\frac{-1}{2}$, - 2, $\frac{-1}{3}$, -3 ஆகும்.

உதாரணம் 6

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=8$$

$y=x-\frac{1}{x}$ என்க.

$$y^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2-2+\frac{1}{x^2}$$

$$y^2+4=x^2+2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$$

தரப்பட்ட சமன்பாடு பின்வருமாறு அமையும்.

$$2\left(y^2+4\right)-3y=8$$

$$2y^2-3y=0$$

$$y\left(2y-3\right)=0$$

$y=0$ அல்லது $y=\frac{3}{2}$

$x-\frac{1}{x}=0$ அல்லது $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$

$x^2-1=0$ அல்லது $2x^2-3x-2=0$

$(x-1)(x+1)=0$ அல்லது $(2x+1)(x-1)=0$

$x=1$ அல்லது -1 அல்லது $x=2$ அல்லது $x=\frac{-1}{2}$

எனவே தரப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தொடை

$\left\{1,-1,\frac{-1}{2},2\right\}$ ஆகும்.

உதாரணம் 7

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(a) $2^{2x}-3\,.\,2^{x+2}+32=0$

(b) $3^{x-2}+3^{3-x}=4$

(a) $2^{2x}-3\,.\,2^{x+2}+32=0$

$\left(2^x\right)^2-3\times 2^2\times 2^x+32=0$

$y=2^x$ என்க

எனவே தரப்பட்ட சமன்பாடு பின்வருமாறு அமையும்.

$y^2-12y+32=0$

$(y-8)(y-4)=0$

$y=8$ அல்லது $y=4$

$2^x=8$ அல்லது $2^x=4$

$2^x=2^3$ அல்லது $2^x=2^2$

$x=3$ அல்லது $x=2$

மூலங்கள் 2, 3 ஆகும்.

(b) $3^{x-2}+3^{3-x}=4$

$\frac{3^x}{3^2}+\frac{3^3}{3^x}=4$

$y=3^x$ என்க

$\frac{y}{9}+\frac{27}{y}=4$

$y^2-36y+27\times 9=0$

$(y-27)(y-9)=0$

$y=27$ அல்லது $y=9$

$3^x=27$ அல்லது $3^x=9$

$3^x=3^3$ அல்லது $3^x=3^2$

$x=3$ அல்லது $x=2$

எனவே சமன்பாட்டின் மூலங்கள் 2, 3 ஆகும்.

உதாரணம் 8

$(x+1)(2x+1)(2x-7)(x-3)=45$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$\{(x+1)(2x-7)\}\{(2x+1)(x-3)\}=45$

$(2x^2-5x-7)(2x^2-5x-3)=45$

$2x^2-5x=y$ என்க

தரப்பட்ட சமன்பாடு பின்வருமாறு அமையும்.

$(y-7)(y-3)=45$

$y^2-10y+21=45$

$y^2-10y-24=0$

$(y+2)(y-12)=0$

$y=12$ அல்லது $y=-2$

$2x^2-5x-12=0$ அல்லது $2x^2-5x=-2$

$(2x+3)(x-4)=0$ அல்லது $(2x-1)(x-2)=0$

$x=\frac{-3}{2}$ அல்லது $x=4$ அல்லது $x=\frac{1}{2}$ அல்லது $x=2$

எனவே தீர்வுத் தொடை $\left\{\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{-3}{2},\ 4\right\}$ ஆகும்.

உதாரணம் 9

தீர்க்க $\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3}=6$

$4x-3\geq 0,\ 2x+3\geq 0$ எனின் மட்டுமே மேலுள்ள சமன்பாடு பொருந்தும்.

அதாவது $x\geq\frac{3}{4}$ ஆயும் $x\geq\frac{-3}{2}$ ஆயும் இருத்தல் வேண்டும்.

$x\geq\frac{3}{4}$ எனின் மேலுள்ள இரு நிபந்தனைகளும் பொருந்தும்.

$\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x+3} = 6 \quad \left(x \geq \frac{3}{2}\right)$

இரு பக்கமும் வர்க்கித்தால்,

$4x-3+2x+3+2\sqrt{(4x-3)(2x+3)} = 36$

$6x+2\sqrt{(4x-3)(2x+3)} = 36$

$\sqrt{(4x-3)(2x+3)} = 18-3x$

$(4x-3)(2x+3) = (18-3x)^2$

$8x^2+6x-9 = 9x^2-108x+324$

$x^2-114x+333 = 0$

$(x-3)(x-111) = 0$

$x = 3$ அல்லது $x = 111$

3, 111 என்பன இரண்டுமே $x \geq \frac{3}{4}$ என்ற நிபந்தனையைத் திருப்தி செய்கின்றன. நாம் இப்போது தீர்வுகளை வாய்ப்புப் பார்ப்போம்.

$x = 3$ ஆக

இ.கை.ப $= \sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3}$

$= \sqrt{9}+\sqrt{9}$

$= 3+3$

$= 6$

= வ.கை.ப

எனவே $x=3$ என்ற தீர்வு பொருத்தமானது.

$x=111$ ஆக

இ.கை.ப $= \sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3}$

$= \sqrt{4\times111-3}+\sqrt{2\times111+3}$

$= \sqrt{441}+\sqrt{225}$

$= 21+15$

$= 36 \neq$ வ.கை.ப

$x=111$ பொருந்தாது.

எனவே சமன்பாட்டின் ஒரேயொரு தீர்வு $x=3$ ஆகும்.

பயிற்சி (4a)

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(1) $3-2(2x+1)=7$

(2) $\frac{x+9}{2}-\frac{2x-3}{2}=\frac{2x-3}{4}$

(3) $\frac{x+3}{4}-\frac{x-3}{5}=2$

(4) $\frac{2x}{15}-\frac{x-6}{12}-\frac{3x}{20}=\frac{3}{2}$

(5) $6-\frac{4(x-3)}{3}=\frac{x-2}{5}$

(6) $\frac{4-3x}{8}+2=\frac{x-5}{4}+x$

(7) $\frac{3x-11}{x-4}-\frac{x+7}{x+4}=2$

(8) $(x+1)(2x-1)+(x-3)(2x+1)=(2x+3)^2$

(9) $\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}=\frac{2}{x+4}$

(10) $\frac{3x-2}{4}-\frac{x-3}{5}=x+1$

பயிற்சி (4b)

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(1) $3x^2-2x=0$

(2) $(x+2)^2=1$

(3) $(x-3)(x-5)=3$

(4) $2x^2-5x-3=0$

(5) $x^2 - 3x(3x-4)+8=0$

(6) $5x(x+1)-x(2x+1)=4$

(7) $x^2+(x+3)^2=15^2$

(8) $\frac{3}{x-3}-\frac{4}{x-4}+\frac{5}{x-1}=0$

(9) $\frac{x}{(x+2)(x-1)}+\frac{1}{(x+2)(2x-1)}-\frac{1}{(x-1)(2x-1)}=0$

(10) $\frac{x-1}{(x-3)(x-2)}-\frac{x-2}{(x-3)(x-1)}=\frac{x+1}{(x-2)(x-1)}$

(11) $\frac{2}{3(x+2)}-\frac{3}{2x+7}=\frac{1}{15}$

(12) $\frac{14}{2x-1}-\frac{7}{x}=\frac{1}{3}$

நிறைவர்க்கமாக்குவதன் மூலம் பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(13) $x^2-6x-5=0$

(14) $2x^2+7x-5=0$

(15) $2x^2-3x-7=0$

(16) $\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{5}=0$

பயிற்சி (4c)

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க. (பொருத்தமான பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்துக.)

(1) $(x^2+5x+7)^2-4(x^2+5x+7)+3=0$

(2) $(x^2-9x+15)(x^2-9x+20)=6$

(3) $\left(x+\frac{2}{x}+4\right)\left(x+\frac{2}{x}-1\right)=14$

(4) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+5\left(\frac{x}{x+1}\right)+6=0$

(5) $3\left[(x+7)^{\frac{1}{2}}+(x+7)^{\frac{-1}{2}}\right]=10$

(6) $x+4\sqrt{x}=12$

(7) $x+3\sqrt{5x}=50$

(8) $x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{-1}{2}}=1\frac{1}{2}$

(9) $x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}=2$

(10) $9x^{\frac{2}{3}}+4x^{\frac{-2}{3}}=37$

(11) $\frac{x^2}{x^2+3x+2}+\frac{2(x^2+3x+2)}{x^2}=12\frac{1}{6}$

(12) $\sqrt{\frac{x}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x}}=2\frac{1}{6}$

(13) $\frac{5}{x^2+6x+2}=\frac{3}{x^2+6x+1}-\frac{4}{x^2+6x+8}$

(14) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+7\left(x-\frac{1}{x}\right)=12\frac{3}{4}$

(15) $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

(16) $9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-27\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$

(17) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$

(18) $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-16\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$

(19) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)-14=0$

(20) $8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-42\left(x-\frac{1}{x}\right)+29=0$

(21) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)=4$

(22) $3^{x+2}+3^{-x}=10$

(23) $5^{x+1}+5^{1-x}=5^2+5^0$

(24) $4^{1+x}+4^{1-x}=10$

(25) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+9}=7$

(26) $2\sqrt{x+1}-3\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-2}$

(27) $\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-5}=1$

(28) $2^{2x+3}=65\left(2^x-1\right)+57$

(29) $(x-6)(x-5)(x+1)(x+2)=144$

(30) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{29}{4}$

(31) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=0$

2. இரு மாறிகளிலான சமன்பாடுகள்

(a) *x, y* மாறிகளை கொண்ட ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகள்
இச்சமன்பாடுகளை $ax+by=m,\quad cx+dy=n$ என்னும் வடிவில் எழுதலாம்.

உதாரணம் 1

தீர்க்க.

$4x+3y=17$

$5x-2y=4$

$4x+3y=17$ ———————— (1)

$5x-2y=4$ ———————— (2)

$(1)\times 2, 8x+6y \quad = 34$

$(2)\times 3, 15x-6y = 12$

$(3)+(4), 23x \quad = 46$

$$x \quad = \frac{46}{23} = 2$$

x=2 ஐ சமன்பாடு (1)இல் பிரதியிட

$8+3y=17$

$3y=9$

$y=3$

$x=2,\quad y=3$

(b) ஒன்று ஏகபரிமாணமானது மற்றையது ஏகபரிமாணம் அற்றது
உதாரணம்

தீர்க்க.

$2x-3y=1$

$2x^2+3x-3y^2=38$

$2x-3y=1$ ———————— (1)

$2x^2+3x-3y^2=38$ ———————— (2)

முதலாவது சமன்பாட்டில் இருந்து $y=\frac{2x-1}{3}$

இரண்டாம் சமன்பாட்டில் பிரதியிட.

$$y=\frac{2x-1}{3}$$
$$2x^2+3x-3y^2=38$$
$$2x^2+3x-3\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2=38$$
$$6x^2+9x-\left(4x^2-4x+1\right)=114$$
$$2x^2+13x-115=0$$
$$\left(2x+23\right)\left(x-5\right)=0$$

$x=\frac{-23}{2}$ அல்லது $x=5$

$x=\frac{-23}{2}$ எனின் $x=5$ எனின்

$y=\frac{-23-1}{3}$ $y=\frac{2\times5-1}{3}$

$=-8$ $=3$

$x=\frac{-23}{2}$ $x=5$

$=-8$ $y=3$

(c) இவ்விரு சமன்பாடுகள் x,y இல் ஏகவினமானதாகவும் மாறிலி ஒன்றிற்கு சமனாக உள்ள இரு சமன்பாடுகள் ஆகும்.
உதாரணம்
தீர்க்க.

$$x^2 - xy = 6 \text{ ——— } (1)$$

$$x^2 - y^2 = 61 \text{ ——— } (2)$$

$$(1)\times 61,\ 61\left(x^2 - xy\right) = 61\times 6$$

$$(2)\times 6,\ 6\left(x^2 - y^2\right) = 6\times 61$$

$$61\left(x^2 - xy\right) = 6\left(x^2 + y^2\right)$$

$$55x^2 - 61xy - 6y^2 = 0$$

$$(11x + y)(5x - 6y) = 0$$

$y = -11x$ அல்லது $y = \frac{5x}{6}$

$y = -11x$ எனின் $y = \frac{5x}{6}$ எனின்

சமன்பாடு (1) இல் இருந்து	சமன்பாடு (1)இல் இருந்து
$12x^2 = 6$ $x^2 = \frac{1}{2}$ $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{-11}{\sqrt{2}} \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{11}{\sqrt{2}} \end{array}\right\}$	$x^2 = 36$ $x = \pm 6$ $\left.\begin{array}{l} x = 6 \\ y = 5 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = -6 \\ y = -5 \end{array}\right\}$

(d) x,y இல் ஒன்று ஏகவினமானது
உதாரணம்

தீர்க்க.

$x^2+xy-2y^2=0$ ———— (1)

$x^2+2xy+3y^2+4x+5y=15$ ——— (2)

சமன்பாடு(1), $x^2+xy-2y^2=0$ என்பது ஏகவினமானது.

$(x+2y)(x-y)=0$

$x=y$ அல்லது $x=-2y$

$x=y$ ஐ சமன்பாடு (2)இல் பிரதியிட

$6y^2+9y-15=0$

$2y^2+3y-5=0$

$(2y+5)(y-1)=0$

$y=\frac{-5}{2}$ அல்லது $y=1$

இங்கு $x=y$

$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=\frac{-5}{2} \\ y=\frac{-5}{2} \end{array}\right\}$

$x=-2y$ ஐ சமன்பாடு (2) இல் பிரதியிட

$3y^2-3y-15=0$

$y^2-y-5=0$

$y=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$

இங்கு $x=-2y$

$\left.\begin{array}{l} x=-\left(1+\sqrt{21}\right) \\ y=\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-\left(1-\sqrt{21}\right) \\ y=\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \end{array}\right\}$

3. மேலும் சில உதாரணங்கள் (மூன்று மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாடுகள் உட்பட)

உதாரணம்

தீர்க்க.

$x(3y-5)=4$ ———— (1)

$y(2x+7)=27$ ———— (2)

முதலாம் சமன்பாட்டில் இருந்து $x=\frac{4}{3y-5}$

$$2x+7=2\times\frac{4}{3y-5}+7$$

$$=\frac{8}{3y-5}+7$$

$$=\frac{21y-27}{3y-5}$$

சமன்பாடு (2)இல் பிரதியிட

$$y\left(\frac{21y-27}{3y-5}\right)=27$$

$$21y^2-27y=27(3y-5)$$

$$21y^2-108y+135=0$$

$$7y^2-36y+45=0$$

$$(7y-15)(y-3)=0$$

$y=\frac{15}{7}$ அல்லது $y=3$ எனின்

$y=\frac{15}{7}$ எனின்

$$x=\frac{4}{3\times\frac{15}{7}-5}=\frac{14}{5}$$

$y=3$ எனின்

$$x=\frac{4}{3\times3-5}=\frac{4}{4}=1$$

$x = \frac{14}{5}$

$y = \frac{15}{7}$ அல்லது $x = 1$, $y = 3$

உதாரணம்

சமன்பாட்டை தீர்க்க.

$3x + 5y = 29xy$ (1)

$7x + 4y = 37xy$ (2)

இங்கு $x = 0$ ஆக $y = 0$ ஆகும்.

அதாவது $x = 0$, $y = 0$ தரப்பட்ட சமன்பாட்டை திருப்திப்படுத்தும்.

$x, y \neq 0$ எனின்

xy இனால் சமன்பாட்டின் இருபக்கமும் வகுத்தல்.

$$\frac{3x}{xy} + \frac{5y}{xy} = 29$$

$$\frac{7x}{xy} + \frac{4y}{xy} = 37$$

$$\frac{3}{y} + \frac{5}{x} = 29 \qquad (3)$$

$$\frac{7}{y} + \frac{4}{x} = 37 \qquad (4)$$

$4 \times (3) - 5 \times (4)$ கிடைப்பது

$$\frac{12}{y} + \frac{35}{y} = 116 - 185$$

$$-\frac{23}{y} = -69$$

$$y = \frac{1}{3}$$

$y = \frac{1}{3}$ ஐ சமன்பாடு (3) இல் பிரதியிட

$$9 + \frac{5}{x} = 29$$

$$x = \frac{1}{4}$$

தீர்வுகள் $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{3} \end{array}\right\}$

உதாரணம் 7

தீர்க்க

$$a+4b+4c=7 \qquad (1)$$
$$3a+2b+2c=6 \qquad (2)$$
$$9a+6b+2c=7 \qquad (3)$$

$2\times(2) - (1)$, $5a = 12-7=5$

$a=1$

$3\times(2) - (3)$, $4c=4$

$c=1$

$a=1,\quad c=1$ என சமன்பாடு (1)இல் பிரதியிட

$$1+4b+4=7$$
$$4b=2$$
$$b=\frac{1}{2}$$

தீர்வுகள் $\left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=1 \end{array}\right\}$

உதாரணம் 8

தீர்க்க.

$x+y=1$ ——— (1)

$y+z=2$ ——— (2)

$z+x=5$ ——— (3)

$(1)+(2)+(3)$, $\quad 2(x+y+z)=8$

$$x+y+z=4 \qquad (4)$$

$x+y=1$ என சமன்பாடு (4)இல் பிரதியிட, $z=3$

$y+z=2$ என சமன்பாடு (4)இல் பிரதியிட, $x=2$

$x+z=5$ என சமன்பாடு (4)இல் பிரதியிட, $y=-1$

தீர்வுகள் $x=2,\quad y=-1,\quad z=3$ ஆகும்.

உதாரணம்

தீர்க்க.

$ab=3$ ——— (1)

$bc=6$ ——— (2)

$ac=2$ ——— (3)

$(1)\times(2)\times(3)$, $\quad (ab)\times(bc)\times(ac)=3\times6\times2$

$$a^2b^2c^2=36$$

$$abc=\pm\, 6$$

$abc=\ 6$ எனின்

(1) இலிருந்து $c=$ -2

(2) இலிருந்து $a=$ -1

(3) இலிருந்து $b=$ -3

சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்.

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=3 \\ c=2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} a=-1 \\ b=-3 \\ c=-2 \end{array}\right\}$$

பயிற்சி 4 (d)

தீர்க்க.

(1) $x-2y=4$
$3x+5y=9$

(2) $3x-2y=7$
$2x-5y=12$

(3) $5x-2y=18$
$3x=11+2y$

(4) $53x+47y=59$
$47x+53y=41$

(5) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{2x+2y}{9}$

(6) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=18$
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=-1$

(7) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=-5$
$\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=21$

(8) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=2$
$\dfrac{9}{x}-\dfrac{4}{y}=1$

(9) $5x-\dfrac{5}{y}=9$
$2x-\dfrac{2}{y}=12$

(10) $4x+\dfrac{5}{y}=3$
$3x-\dfrac{4}{y}=10$

(11) $ax-by=bx-ay=a^2-b^2$

(12) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2}{y-4}=2$
$\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{9}{y-4}=5$

(13) $\dfrac{x-2}{y}=\dfrac{1}{3}$
$\dfrac{x}{y+1}=\dfrac{1}{2}$

(14) $\dfrac{x+y}{xy}=2$
$\dfrac{x-y}{xy}=6$

(15) $(a+b)x+(a-b)y=2a$
$(a-b)x+(a+b)y=2b$

பயிற்சிகள் (4e)

தீர்க்க.

(1) $y-2x=1$, $y^2=2x^2+x$

(1) $x-2y=1$, $x^2-2xy+2y^2=25$

(3) $2x+3y=5$, $x^2+2xy=10+y$

(4) $x+y=4$, $x^2-y=8$

(5) $3x+2y=25$, $xy=4$

(6) $2y-3x=2$, $4y^2-4xy-18x^2=5$

(7) $x^2-y^2=7$, $x=y^2-5$

(8) $4x^2-3y^2=13$, $5x^2+2y=18$

(9) $x^2+xy-y^2+6x-1=0$, $3x^2+5xy-2y^2=0$

(10) $x^2+xy=2y^2$, $x^2+2xy+3y^2+4x+5y=15$

(11) $x^2-2xy-y^2=14$, $2x^2+3xy+y^2=-2$

(12) $x^2-xy+3y^2=15$, $3x^2-2y^2=-5$

(13) $(x-2)(y-1)=3$, $(x+2)(2y-5)=15$

(14) $\frac{x}{3}+\frac{3}{y}=\frac{x}{4}-\frac{4}{y}=1$

(15) $x(y+3)=4$, $3y(x-4)=5$

(16) $x-2y+3z=17$, $2x+y+5z=17$, $3x-4y-2z=1$

(17) $2x+3y-4z=10$, $4x-5y+3z=2$, $2y+z=8$

(18) $x+3y-2z=19$, $3x-y-z=7$, $-2x+5y+z=2$

(19) $4x+3y-2z=11$, $3x-7y+3z=10$, $9x-8y+5z=9$

(20) $xy = 1, \quad yz = 9, \quad zx = 16$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

இதிலிருந்து $(y+z)(z+x) = 1, (z+x)(x+y) = 9, (x+y)(y+2) = 16$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண்க.

(21) தீர்க்க.

$$(y-2)(z-1) = 4$$
$$(z-1)(x+1) = 20$$
$$(x+1)(y-2) = 5$$

(22) தீர்க்க.

$x(y+z) = 33$, $y(z+x) = 35$, $z(x+y) = 14$

23) தீர்க்க.

$y(z-x) = 3, \quad x(y+z) = 32, \quad x+y+z = 12$

5. சுட்டிகளும் மடக்கைகளும்

சுட்டி விதிகள்

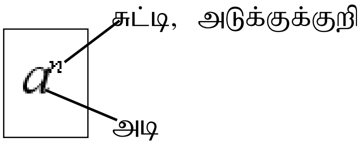
a,b மெய்யெண்கள் ஆகும். m,n விகிதமுறு எண்கள்

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$
$$(ab)^m = a^m b^m$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$a \neq 0$, n விகிதமுறு எண்ணாக இருக்க,

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $a^0 = 1$ ஆகும்.

a^n இல் a என்பது அடி ஆகும். n என்பது சுட்டி அல்லது அடுக்குக் குறியாகும்.



சமன்பாட்டில் மாறி அடுக்குக் குறியாக இருப்பின், அச்சமன்பாடு அடுக்குக் குறி சமன்பாடு எனப்படும். உதாரணம்: $2^x = 32$ அடுக்குக்குறி சமன்பாடாகும்.

உதாரணம் 1

$x = 9$, $y = 16$ ஆகும் போது பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(a) $x^{\frac{1}{2}} . y^{\frac{3}{4}}$ (b) $\left(\dfrac{6x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}$ (c) $(4xy)^{\frac{-1}{2}}$ (d) $(x+y)^{\frac{-1}{2}}$

(a) $x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{3}{4}} = (9)^{\frac{1}{2}}(16)^{\frac{3}{4}}$

$= (3^2)^{\frac{1}{2}}(2^4)^{\frac{3}{4}}$

$= 3\times 2^3 = 3\times 8 = 24$

(b) $\left(\frac{6x}{y}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{6\times 9}{16}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

(c) $(4xy)^{\frac{-1}{2}} = (4\times 9\times 16)^{\frac{-1}{2}}$

$= \left[(2\times 3\times 4)^2\right]^{\frac{-1}{2}}$

$= (2\times 3\times 4)^{-1} = 24^{-1} = \frac{1}{24}$

(d) $(x+y)^{\frac{-1}{2}} = (9+16)^{\frac{-1}{2}} = (25)^{\frac{-1}{2}}$

$= (5^2)^{\frac{-1}{2}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

உதாரணம் 2

தீர்க்க (a) $2^x = 10^3\times 5^{-x}$

(b) $16^{x-1} = \frac{1}{8}$

(a) $2^x = 10^3\times 5^{-x}$

$2^x = 10^3\times \frac{1}{5^x}$

$2^x\times 5^x = 10^3$

$10^x = 10^3$

$x = 3$

(b) $16^{x-1} = \frac{1}{8}$

$(2^4)^{x-1} = \frac{1}{2^3}$

$2^{4x-4} = 2^{-3}$

$4x-4 = -3$

$4x = -3+4 = 1$

$x = \frac{1}{4}$

மடக்கை

$y=3^x$ இல் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் y இன் பெறுமானம் நேராகும்.

$x=2$ ஆக $y=9$ ஆகும்.

$x=3$ ஆக $y=27$

$x=0$ ஆக $y=1$

$x=-4$ ஆக $y=\frac{1}{81}$

$3^x=y$ என்க. 3 என்பது அடியாகும். x என்பது சுட்டியாகும். y இனது அடி 3இலான மடக்கை x ஆகும்.

$$3^x=y \Leftrightarrow \log_3 y=x$$

பொதுவாக $a^x=y$ எனின் $(a>o, y>o)$ x என்பது aஐ அடியாக் கொண்ட yஇன் மடக்கை எனப்படும்.

$$a^x=y \Leftrightarrow \log_a y=x \ , \ a y>o \ , \ a\neq 1$$

உதாரணம்

$$2^5=32 \quad \Leftrightarrow \log_2 32 \quad =5$$

$$10^3=1000 \Leftrightarrow \log_{10} 1000=3$$

$$3^{-4}=\frac{1}{81} \quad \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{81}=-4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}=5$$

$$a^1=a \quad \Leftrightarrow \log_a{}^a=1$$

மடக்கை விதிகள்.

m,n என்பது நேராகவும் $a \neq 1$ ஆகவுமிருக்க.

(a) $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$

(b) $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

(c) $\log_a m^p = p \log_a m$ இங்கு p மெய்யெண் ஆகும்.

$\log_a m = x$, $\log_a n = y$ என்க.

$\log_a m = x \Leftrightarrow m = a^x$

$\log_a m = y \Leftrightarrow n = a^y$

(a) $mn = a^x \times a^y = a^{x+y} \Leftrightarrow \log_a mn = x + y = \log_a m + \log_a n$

(b) $\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Leftrightarrow \log_a^{\frac{m}{n}} = x - y$

$\log_a \frac{m}{n} = x - y = \log_a m - \log_a n$

(c) $m^p = \left(a^x\right)^p = a^{px}$

$\log_a m^p = \log_a a^{px} = px = p \log_a m$

உதாரணம்

பின்வருவனவற்றின் பெறுமானம் காண்க.

(a) $\log_{10} 5 - \log_{10} 16 + 2\log_{10} 2 + \log_{10} 8$

(b) $\log_{10} 54 - \log_{10} 15 + \log_{10} \frac{5}{3}$

(a) $\log_{10} 5 - \log_{10} 16 + 2\log_{10} 2 + \log_{10} 8$

$= \log_{10} 5 - \log_{10} 16 + \log_{10} 2^2 + \log_{10} 8$

$= \log_{10} \left(\frac{5 \times 2^2 \times 8}{16}\right)$

$= \log_{10} 10 = 1$

(b) $\log_{10}54 - \log_{10}15 + 2\log_{10}\frac{5}{3}$

$$= \log_{10}54 - \log_{10}15 + \log\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$= \log_{10}\left(\frac{54\times\left(\frac{5}{3}\right)^2}{15}\right)$$

$$= \log_{10}\left(\frac{54\times 25}{9\times 15}\right)$$

$$= \log_{10}10 = 1$$

உதாரணம்-2

தீர்க்க (a) $3\log x + \log 96 = 2\log 9 + \log 4$

(b) $4\log x + 6\log 3 = \log 625 + \log 9$

(a) $3\log x + \log 96 = 2\log 9 + \log 4$

$$\log x^3 + \log 96 = \log 9^2 + \log 4$$

$$\log\left(x^3\times 96\right) = \log\left(9^2\times 4\right)$$

$$x^3\times 96 = 9^2\times 4$$

$$x^3 = \frac{9^2\times 4}{96}$$

$$x^3 = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

(b) $4\log x + 6\log 3 = \log 625 + \log 9$

$$\log x^4 + \log 3^6 = \log 625 + \log 9$$
$$\log\left(x^4 \times 3^6\right) = \log(625 \times 9)$$
$$x^4 \times 3^6 = 625 \times 9$$
$$x^4 = \frac{625 \times 9}{3^6} = \left(\frac{5}{3}\right)^4$$
$$x = \frac{5}{3}$$

உதாரணம் - 3

$\log_{10}2 = 0.3010$, $\log_{10}3 = 0.4771$ எனத் தரப்படின் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானம் காண்க.

(a) $\log_{10}18$ (b) $\log_{10}15$ (c) $\log_{10}0.012$

(a) $\log_{10}18 = \log_{10}\left(2 \times 3^2\right)$

$$= \log_{10}2 + \log_{10}3^2$$
$$= \log_{10}2 + 2\log_{10}3$$
$$= 0.3010 + 2 \times 0.4771$$
$$= 0.3010 + 0.9542$$
$$= 1.2552$$

(b) $\log_{10}15 = \log_{10}(5 \times 3)$

$$= \log_{10}5 + \log_{10}3$$
$$= \log_{10}\frac{10}{2} + \log_{10}3$$
$$= \log_{10}10 - \log_{10}2 + \log_{10}3$$
$$= 1 - 0.3010 + 0.4771$$
$$= 1.1761$$

(c) $\log_{10} 0.012 = \log_{10} \dfrac{12}{1000}$

$$
\begin{aligned}
&= \log_{10} 12 - \log_{10} 1000 \\
&= \log\left(2^2 \times 3\right) - \log_{10} 10^3 \\
&= \log_{10} 2^2 + \log_{10} 3 - 3\log_{10} 10 \\
&= 2 \times 0.3010 + 0.4771 - 3 \\
&= 1.0791 - 3 \\
&= 1 + 0.0791 - 3 \\
&= -2 + 0.0791 = \bar{2}.0791
\end{aligned}
$$

உதாரணம்-4

பெறுமானம் காண்க.

(a) $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{243}$ (b) $\log_{2\sqrt{2}} 16$

$\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{243} = x$ என்க. $\log_{2\sqrt{2}} 16 = y$ என்க.

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{3}\right)^x &= 243 \\
3^{\frac{1}{2}x} &= 3^5 \\
\frac{1}{2}x &= 5 \\
x &= 10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(2\sqrt{2}\right)^y &= 16 \\
2^{\frac{3y}{2}} &= 2^4 \\
\frac{3y}{2} &= 4 \\
y &= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

பயிற்சி 5

(1) $x = 27$, $y = 4$ எனின் பெறுமானம் காண்க

(a) $\left(x^{\frac{2}{3}}y\right)^{\frac{1}{2}}$ (b) $(2xy)^{\frac{-1}{3}}$

(c) $\left(\frac{12y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ (d) $\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{2}\right)^{\frac{-1}{2}}$

(2) பெறுமானம் காண்க.

(a) $\left(25^{\frac{1}{2}}\times16^{\frac{1}{4}}\right)^{-2}$ (b) $\left(\frac{64^{\frac{1}{6}}+27^{\frac{2}{3}}}{110}\right)^{2}$

(c) $\left(\frac{81}{24}\right)^{\frac{1}{2}}$

(3) $x = 81$, $y = 16$, $z = 25$ எனின் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானம் காண்க.

(a) $(xy)^{\frac{3}{4}}$ (b) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$ (c) $\left(\frac{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}{z^{\frac{-1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

(4) சுருக்குக.

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\times\frac{1}{3^{-4}}\times\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(5) தீர்க்க.

(a) $3^{x+1} = 243$

(b) $16^{x-1} = \frac{1}{8}$

(c) $4^{3x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

(d) $27^{x-3} = 3 \times 9^{x-2}$

(e) $3^{x^2} = 9^{x+4}$

(f) $9^x - 4 \times 3^x + 3 = 0$

(6) பின்வருவனவற்றைக் கணிக்க.

(a) $\log_3 81$ (b) $\log_{3\sqrt{2}} 324$ (c) $\log_{2\sqrt{3}} 144$ (d) $\log_{343} 7$

(7) பெறுமானம் காண்க.

(a) $\log_{10}\frac{15}{5} + \log_{10}\frac{25}{21} - \log_{10}\frac{2}{7}$

(b) $\log_{10}\frac{3}{4} + \log_{10}\frac{10}{9} - \log_{10} 12 - 2$

(c) $\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 4}$

(d) $\log_{10} 2 + 2\log_{10} 5 - \log_{10} 2$

(8) பின்வரும் சமன்பாடுகளில் x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(a) $5 \log x - \log 729 = 6 \log 2 + 11 \log x$

(b) $4 \log x + 2\log 9 = 3 \log 24 - \log 54$

(c) $2 \log x = \log 3 + \log (2x - 3)$

(9) தீர்க்க

(a) $2^{2+2x} + 3.\ 2^x - 1 = 0$

(b) $\log_{10}(x^2+1) - 2\log_{10} x = 1$

(10) $\log_{10} 2 + 16\log_{10}\frac{16}{15} + 12\log_{10}\frac{25}{24} + 7\log\frac{81}{80} = 1$ எனக் காட்டுக.

(11) பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(a) $\log(ab^2)-\log(ac)+\log(bc^4)-3\log(bc)=0$

எல்லாவற்றினதும் அடிகள் சமனாகும்.

(b) $\log(\log x^5)-\log(\log x^2)=\log\frac{5}{2}$

(c) $\log\left(\frac{a^2}{bc}\right)+\log\left(\frac{b^2}{ca}\right)+\log\left(\frac{c^2}{ab}\right)=0$

(12) $a^2+b^2=7ab$ எனின்

$\log\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}\log a+\frac{1}{2}\log b$ எனக் காட்டுக.

(13) $\log\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{2}\log y$ எனின் $x=y$ என நிறுவுக.

(14) $\log(1+2+3)=\log 1+\log 2+\log 3$ என நிறுவுக.

(15) x, y, z என்பன அடுத்துவரும் மூன்று நேர் நிறை எண்கள் ஆகும்.

$\log(1+xz)=2\log y$ எனக் காட்டுக.

(16) $\log a+\log a^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\log a^{2n}$

$=n(2n+1).\log a,$ எனக் காட்டுக (இங்கு $a>o$) என நிறுவுக.

(17) $\log(x+y)=\log x-\log y$ எனின்

$x(1-y)=y^2$ எனக் காட்டுக.

(18) $2^x\bullet 3^y=3^x4^x=6$ எனின் $x^2-2y^2=2x-3y$ எனக் காட்டுக.

(19) $\frac{\log x}{2}=\frac{\log y}{3}=\frac{\log z}{5}$ எனின் (i) $xy=z$ (ii) $x^8=y^2z^2$ எனக் காட்டுக.

(20) $\frac{\log x}{1}=\frac{\log y}{3}=\frac{\log z}{7}$ எனின் $x^5y^3z^{-2}=1$ எனக் காட்டுக.

6. விகிதம், விகிதசமன்

விகிதசமன் :- சமனான இரு விகிதங்கள் விகிதசமன் என அழைக்கப்படும். $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ என்பது விகிதசமன் ஆகும். இதனை $a:b=c:d$ என எழுதலாம். இங்கு a,b,c,d விகிதசமனமான விகிதசமன் (Proportionals) என அழைக்கப்படும்.

விகித சமனுக்கான விதிகள்.

இங்கு $a:b=c:d$ எனின்

(1) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

(2) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

(3) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ எனின்

$\Rightarrow a=kb \quad c=kd$

(1) $\frac{a+b}{b}=\frac{kb+b}{b}=\frac{b(k+1)}{b}=k+1$

$\frac{c+d}{d}=\frac{kd+d}{d}=\frac{d(k+1)}{d}=k+1$

இங்கு $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

(2) $\frac{a-b}{b}=\frac{kb-b}{b}=\frac{b(k-1)}{b}=k-1$

$\frac{c-d}{d}=\frac{kd-d}{d}=\frac{d(k-1)}{d}=k-1$

இங்கு $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

(3) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{kb+b}{kb-b}=\frac{b(k+1)}{b(k-1)}=\frac{k+1}{k-1}$

$\frac{c+d}{c-d}=\frac{kd+d}{kd-d}=\frac{d(k+1)}{d(k-1)}=\frac{k+1}{k-1}$

இங்கு $\frac{a+b}{c-d}=\frac{c+d}{c-d}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ எனின் ஒவ்வொரு விகிதமும் $\frac{ma+nc}{mb+nd}$ இற்கு சமனாகும்.

அதாவது $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ எனின் $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} = \frac{ma+nc}{mb+nd}$ ஆகும்.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ என்க

$a=kb$, $c=kd$ ஆகும்.

$\frac{ma+nc}{mb+nd} = \frac{kmb+knd}{mb+nd}=\frac{k(mb+nd)}{(mb+nd)}=k$

எனவே, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ma+nc}{mb+nd}$

பிரசினங்கள் தீர்ப்பதற்கு இம்முடிவு பயன்படுத்தப்படும்.

உதாரணம் 1

$\frac{4a+b}{2a+b}=7$ எனின் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(a) $\frac{5a+b}{5a-b}$ (b) $\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$

$$\frac{4a+b}{2a+b}=7$$

$$4a+b=14a+7b$$

$$10a=-6b$$

$$5a=-3b$$

$$a=\frac{-3b}{5}$$

(a) $$\frac{5a+b}{5a-b}=\frac{-3b+b}{-3b-b}=\frac{-2b}{-4b}=\frac{1}{2}$$

(b) $$\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}=\frac{b^2-\frac{9b^2}{25}}{b^2+\frac{9b^2}{25}}=\frac{16}{34}=\frac{8}{17}$$

உதாரணம் 2

தீர்க்க.

$$2x-3y=0$$

$$3x+4y=51$$

$$2x-3y=0 \qquad 2x=3y$$

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}$$

$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=k$ என்க

$$k=\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{3x+4y}{3\times3+4\times2}=\frac{51}{17}=3$$

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=3$$

$$\left.\begin{matrix}x=9\\ y=6\end{matrix}\right\}$$

உதாரணம் 3

$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$ எனின் $\frac{2x+3y}{2x-3y}=\frac{2a+3b}{2a-3b}$ எனக் காட்டுக.

$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$ ஆகவே $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

$k=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ என் க

$$k=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{2x+3y}{2a+3b}$$

$$k=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{2x-3y}{2a-3b}$$

$$\frac{2x+3y}{2a-3b}=\frac{2x-3y}{2a-3b}$$

$$\frac{2x+3y}{2x-3y}=\frac{2a+3b}{2a-3b}$$

முறை-II

$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=k$ என்க

$x=ky, \quad a=kb$ ஆகும்

$\frac{2x+3y}{2x-3y}=\frac{2ky+3y}{2ky-3y}=\frac{2k+3}{2k-3}$

$\frac{2a+3b}{2a-3b}=\frac{2kb+3b}{2kb-3b}=\frac{2k+3}{2k-3}$

ஆகவே $\frac{2x+3y}{2x-3y}=\frac{2a+3b}{2a-3b}$

உதாரணம் 4

$(4a+b)(4c-7d)=(4a-7b)(4c+d)$ எனின்

$a:b=c:d$ எனக் காட்டுக.

$(4a+b)(4c-7d)=(4a-7b)(4c+d)$

$\frac{(4a+b)}{(4c+d)}=\frac{(4a-7b)}{(4c-7d)}=k$ என்க

$$k=\frac{(4a+b)}{(4c+d)}=\frac{(4a-7b)}{(4c-7d)}=\frac{(4a+b)-(4a-7b)}{(4c+d)-(4c-7d)}$$

$$=\frac{8b}{8d}=\frac{b}{d}$$

$$k=\frac{4a+b}{4c+d}=\frac{4a-7b}{4c-d}$$

$$k=\frac{7(4a+b)}{7(4c+d)}=\frac{4a-7b}{4c-7b}=\frac{7(4a+b)+(4a-7b)}{7(4c+d)+(4c-7b)}$$

$$=\frac{32a}{32c}=\frac{a}{c}$$

ஆகவே $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

உதாரணம் - 4 முறை-II

$(4a+7b)(4c-7b)=(4a-7b)(4c+7b)$ எனின்

$a:b=c:d$ எனக் காட்டுக.

$\frac{a}{b}=m$, $\frac{c}{d}=n$ என்க

$a=mb$, $c=nd$ என்பதை

$(4a+7b)(4c-7d)=(4a-7b)(4c+7d)$ எனும் சமன்பாட்டில்

பிரதியிட பெறப்படுவது.

$$(4mb+7b)(4nd-7d)=(4mb-7b)(4nd+7d)$$

$$bd(4m+7)(4n-7)=bd(4m-7)(4n+7)$$

$$b,d\neq 0$$

$$(4m-7)(4n-7)=(4m-7)(4n+7)$$

$$16mn+28n-28m-49=16mn+28n-28n-49$$

$$28n-28m=28m-28n$$

$$n-m=m-n$$

$$2m=2n$$

$$m=n$$

ஆகவே $a:b=c:d$

உதாரணம் 5

$x=\frac{6ab}{a+b}$ எனின் $\frac{x+3a}{x-3a}+\frac{x+3b}{x-3b}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$x=\frac{6ab}{a+b}\Rightarrow\frac{x}{2b}=\frac{3a}{a+b}$$

$$\frac{x}{2b}=\frac{3a}{a+b}=\frac{x+3a}{2b+(a+b)}=\frac{x-3a}{2b-(a+b)}$$

$$\frac{x+3a}{3b+a}=\frac{x-3a}{b-a}$$

$$\frac{x+3a}{x-3a}=\frac{3b+a}{b-a} \quad \text{———————— (1)}$$

$$x=\frac{6ab}{a+b}\Rightarrow\frac{x}{2a}=\frac{3b}{a+b}$$

$$\frac{x}{2a}=\frac{3b}{a+b}=\frac{x+3b}{2a+(a+b)}=\frac{x-3b}{2a-(a+b)}$$

$$\frac{x+3b}{3a+b}=\frac{x-3b}{a-b}$$

$$\frac{x+3b}{x-3b}=\frac{3a+b}{a-b} \quad \text{———————} (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) இல் இருந்து

$$\frac{x+3a}{x-3a}+\frac{x+3b}{a-3b}=\frac{3b+a}{b-a}+\frac{3a+b}{a-b}$$

$$=\frac{(3b+a)-(3a+b)}{(b-a)}$$

$$=2\frac{(b-a)}{(b-a)}$$

$$=2$$

பயிற்சி 6

(1) (a) $a:b=5:3,\quad b:c=4:5$ எனின் $a:b:c$ ஐக் காண்க.

(a) $x:y=3:4,\quad x:z=4:5$ எனின் $x:y:z$ ஐக் காண்க.

(2) $x:y=7:5$ எனின் $5x-2y:5x+2y$ ஐக் காண்க.

(3) $3x+5y:5x+12y=1:2$ எனின் $x:y$ ஐக் காண்க.

(4) $5a^2-ab:2ab-b^2=6:1$ எனின் $a:b$ ஐக் காண்க.

(5) $a:b=c:d$ எனின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(a) $(2a+3b):(2c+3d)=(2a-3b):(2c-3d)$

(b) $(3a+5b):(3a-5b)=(3c+5b):(3c-5d)$

(6) $x=\dfrac{2ab}{a+b}$ எனின் $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+b}{x-b}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(7) $x=\dfrac{100b}{a+b}$ எனின் $\dfrac{x+5a}{x-5a}+\dfrac{x+5b}{x-5b}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க

.

(8) $(2a+3b)(2c-3d)=(2a-3b)(2c+3d)$ எனின் $a:b=c:d$ எனக் காட்டுக.

(9) $(3a+6b-c-2d)(3a-6b+c-2d)=(3a+6b+c+2d)$ $(3a-6b-c+2d)$ எனின் $a:b=c:d$ எனக் காட்டுக.

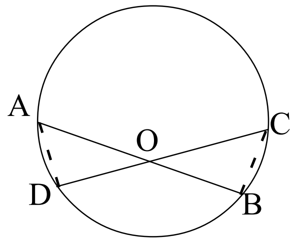
(10) விகதசமன் தொடர்பான பண்புகளைப் பயன்படுத்தி சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(a) $\dfrac{x^2+1}{2x}=\dfrac{5}{4}$ a) $\dfrac{x^3+3x}{3x^2+1}=\dfrac{341}{91}$

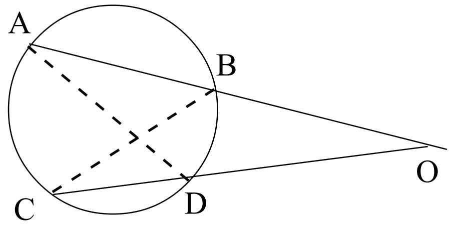
7. வட்டத்துடன் தொடர்புடைய செவ்வகங்கள்.

தேற்றம்

ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்கள் ஒன்றையொன்று உட்புறமாக அல்லது வெளிப்புறமாக வெட்டினால், ஒன்றினுடைய துண்டுகளால் அமையுஞ் செவ்வகம், மற்றையதினுடைய துண்டுகளால் அமையும் செவ்வகத்திற்குச் சமமாகும்.



(I)



(II)

தரவு : நாண்கள் AB, CD என்பன Oவில் வெட்டுகின்றன.
((i) இல் உட்புறமாக, (ii) இல் வெளிப்புறமாக)

நிறுவ வேண்டியது : OA.OB = OC.OD

கருவி : AD, BC என்பவற்றை இணைக்க.

நிறுவல் : முக்கோணிகள் AOD, COB என்பவற்றில்

$\angle OAD = \angle OCB$ (ஒரே துண்டக் கோணங்கள்)

$\angle AOD = \angle COB$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

ஆகவே, அவற்றின் மூன்றாம் கோணங்கள் சமம்.

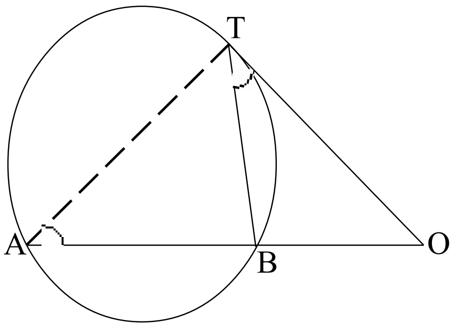
$\therefore\ \Delta AOD,\ \ \Delta COB$ இயல்பொத்தவை

$$\frac{AO}{CO} = \frac{OD}{OB}$$

$$AO.OB = CO.OD$$

தேற்றம்

ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அதற்கு ஒரு வெட்டியும் ஒரு தொடலியும் வரைந்தால், அவ்வெட்டியாலும், அவ்வட்டத்துக்கு வெளியேயுள்ள அவ்வெட்டுக் கோட்டுத்துண்டத்தாலும் அமையுஞ் செவ்வகம் அத்தொடலியின் சதுரத்திற்கு சமமாகும்.



தரவு : OBA என்பது வெட்டியும், OT தொடலியும் ஆகும்.

நிறுவ வேண்டியது : $OA.OB = OT^2$

கருவி : BT, AT ஐ இணைக்க.

நிறுவல் : முக்கோணிகள் OAT, OTB என்பவற்றில்

$\angle AOT = \angle BOT$

$\angle OAT = \angle OTB$ (ஒன்றுவிட்ட துண்டக் கோணங்கள்)

எனவே, அவற்றின் மூன்றாம் கோணங்கள் சமமாகும்.

முக்கோணிகள் OAT, OTB இயல்பொத்தவை

$$\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OB}$$

$$OA.OB = OT^2$$

பயிற்சிகள்

(1) Oவை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் வெளிப்புள்ளி P இல் இருந்து வரையப்பட்ட வெட்டி ஆகும். OP=10cm, வட்டத்தின் ஆரை 6cm ஆயின் P இல் இருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடலியின் நீளம் யாது?

(2) ஒரு வட்டத்தின் வெளிப்புள்ளி P இல் இருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடலி PT ஆகும். PQR ஓர் வெட்டியாகும். PQ=4cm, PT=8cm ஆயின் QR இன் நீளம் யாது?

(3) கூர்ங்கோண முக்கோணி ABC இல் BD,CE என்னும் குத்துயரங்கள் H இல் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன. BH.HD=EH.HC என நிறுவுக.

(4) ஓர் ஆற்றின் கரைகளை இணைக்கும் பாலத்தின் நீளம் 100m. அதன் மேலுள்ள நடைபாதை வட்டவில் வடிவிலானது. இது பாலத்தின் முனைகளிலுள்ள A,B எனும் தாங்கிகளின் மீது பொருத்தப்பட்டுள்ளது. நடை பாதையின் உச்சிப்புள்ளி C ஆனது பாலத்திலிருந்து 20m துாரத்தில் உள்ளதாயின் வில்லின் ஆரையைக் கணிக்க.

PXY

(5) ஒரு வட்டத்தின் வெளிப்புள்ளி T யிலிருந்து வரையப்பட்ட இரு தொடலிகள் TA, TB ஆகும். OT, AB என்பன X இல் வெட்டப்படுகின்றன

I. AX . XB=OX. XT

II. OX . $OT=OA^2$ என நிறுவுக.

(6) A,B என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டாத இரு வட்டங்களின் மையங்களாகும். O என்பதை மையமாகக் கொண்ட ஒரு மூன்றாம் வட்டம் ஒரு வட்டத்தை C,D என்பனவற்றிலும், மற்றையதை E,F என்பவனவற்றிலும் வெட்டுகின்றன. CD, EF எனும் நேர்கோடுகள் நீட்டப்படும் போது அவை P இல் சந்திப்பின் Pயிலிருந்து மூன்று வட்டங்களுக்கும் வரையப்படும் தொடலிகள் சமன் எனக் காட்டுக.

(7) AB,AC என்பன ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்களாகும். வட்டத்திற்கு A இயிலுள்ள தொடலிக்கு சமாந்தரமான யாதுமொரு நேர்கோடு AB,AC என்பனவற்றை முறையே D,E என்பனவற்றில் சந்திப்பின் AB.AD=AC.CE என நிறுவுக.

(8) PQ,PR என்பன ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்களாகும் இவ்வட்டத்தின் PS என்னும் வேறொரு நாண் QR என்பதை T இற் சந்திப்பின் $PS.PT=PQ^2$ என நிறுவுக.

8. பைதகரசின் தேற்றமும் அதன் விரிவாக்கங்களும்

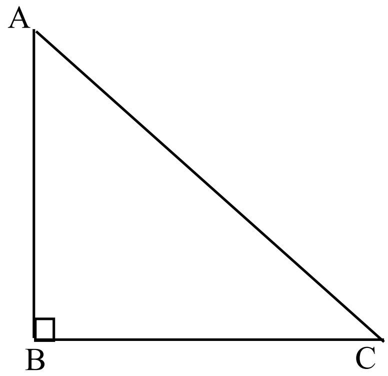
பைதகரசின் தேற்றம்

ஒரு செங்கோண முக்கோணியினுடைய செம்பக்கத்திலமையும் சதுரத்தின் பரப்பளவு, மற்றைய பக்கங்களிலமையும் சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

செங்கோண முக்கோணி ABC யில

$\hat{B} = 90^0$ எனின்

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ ஆகும்



பைதகரசின் தேற்றத்தின் மறுதலை.

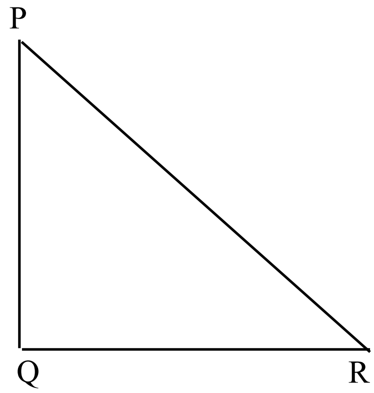
தேற்றம்

ஒரு முக்கோணியினுடைய ஒரு பக்கச் சதுரத்தின் பரப்பளவு மற்றைய இரு பக்கங்களின் சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத் தொகைக்கு சமமாயின், அவ்விரு பக்கங்களுக்குமிடையேயான கோணம் செங்கோணமாகும்.

முக்கோணி PQR இல்

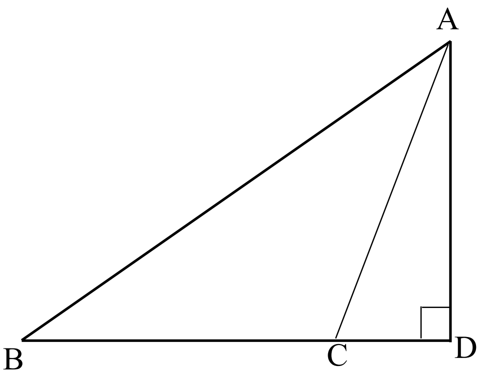
$PQ^2 + QR^2 = PR^2$ எனின்

$P\hat{Q}R = 90^0$ ஆகும்



தேற்றம்

ஒரு விரிகோண முக்கோணியில், அதன் விரிகோணத்திற்கு எதிரான பக்கத்திலுள்ள சதுரம், அக்கோணத்தை அமைத்துள்ள பக்கங்களிலுள்ள சதுரங்களின் மொத்தத்துடன் இவற்றுள் ஒரு பக்கத்தாலும் அதன் மீதுள்ள மற்றைய பக்கத்து எறியத்தாலும் அமையும் செவ்வகத்தின் இரு மடங்கைக் கூட்டவருங் கூட்டுத்தொகைக்கு சமமாகும்.



தரவு : ABC என்பது C இல் விரிகோணமுடைய முக்கோணி CD என்பது BDயின் மீதுAC இன் எறியம் ஆகும்.

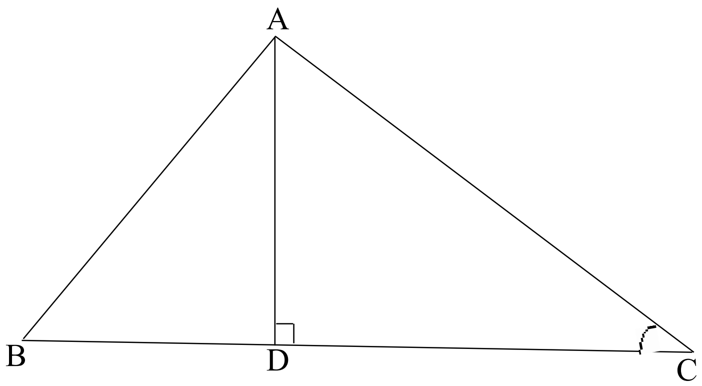
நிறுவ வேண்டியது : $AB^2=BC^2+CA^2+2CB.CD$

நிறுவல் : செங்கோண முக்கோணி ABC

$$
\begin{aligned}
AB^2 &= BD^2+AD^2 \\
&= (BC+CD)^2+AD^2 \\
&= BC^2+2BC.CD+CD^2+AD^2 \\
&= BC^2+2BC.CD+AC^2 \\
&= BC^2+AC^2+2BC.CD
\end{aligned}
$$

தேற்றம்

யாதாயினும் ஒரு முக்கோணியில் ஒரு கூர்ங்கோணத்திற்கு எதிரான பக்கத்திலுள்ள சதுரம். அக்கோணத்தை அமைத்துள்ள பக்கங்களிலுள்ள சதுரங்களின் மொத்தத்திலிருந்து இவற்றுள் ஒரு பக்கத்தாலும் அதன் மீதுள்ள மற்றைய பக்கத்தின் எறியத்தாலும் அமையும் செவ்வகத்தின் இருமடங்கைக் கழிக்கவரும் மீதிக்கு சமனாகும்.



தரவு : ABC எனும் முக்கோணியில் C கூர்ங் கோணமாகும். CD என்பது BC யின் மீது AC இன் எறியம் ஆகும்.

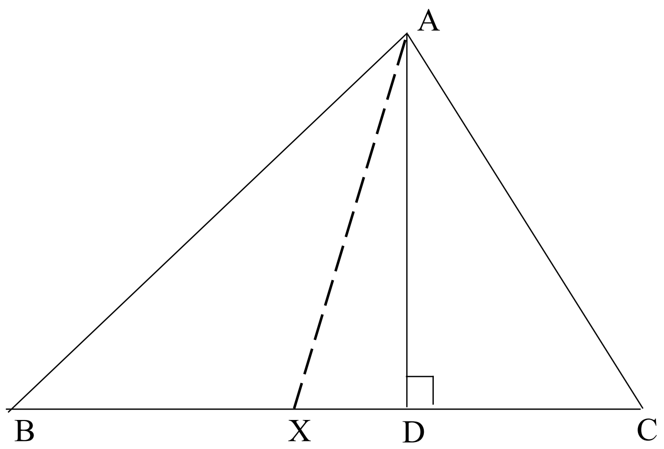
நிறுவ வேண்டியது : $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB.CD$

நிறுவல் : ABD செங்கோண முக்கோணி

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$
$$= AD^2 + (BC - CD)^2$$
$$= AD^2 + BC^2 - 2BC.CD + CD^2$$
$$= AD^2 + CD^2 + BC^2 - 2BC.CD$$
$$= AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$$

அப்பலோனியசின் தேற்றம்

யாதாயினும் ஒரு முக்கோணியில் இரு பக்கங்களிலுள்ள சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகை மூன்றாம் பக்கத்தின் அரைப் பகுதியிலுள்ள சதுரத்தின் இரு மடங்கோடு அப்பக்கத்தின் இடையத்திலுள்ள சதுரத்தின் இருமடங்கைக் கூட்டவருங் கூட்டுத் தொகைக்கு சமமாகும்.



தரவு : முக்கோணி ABC யில் BX = XC
AX இடையம் ஆகும்.

நிறுவ வேண்டியது : $AB^2+AC^2=2BX^2+2AX^2$

கருவி : BCயிற்கு செங்குத்தாக AD வரையப்பட்டுள்ளது.

நிறுவல் : கோணங்கள் AXB, AXC என்பவற்றுள் ஒன்று விரிகோணம், மற்றையது கூர்ங்கோணம் ஆகும்.
AXB விரிகோணம் என்க.

முக்கோணி AXB இல்

$AB^2=AX^2+BX^2+2BX.XD$ ———— (1)

முக்கோணி AXC இல்

$AC^2=AX^2+XC^2-2CX.XD$ ———— (2)

(1),(2) ஐக் கூட்ட

$AB^2+AC^2=2AX^2+2BX^2$ (BX=XC என்பதால்)

பயிற்சி

1. ABC என்பது ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும். பக்கம் BC இன் நடுப்புள்ளி O எனின் $3BC^2 = 4\ OA^2$ என நிறுவுக.

2. சதுரம் ABCD இன் பக்க நீளம் 12cm ஆகும். மூலை விட்டம் BD இன் மேல் அமையும் சதுரத்தின் பரப்பளவு சதுரம் ABCD இன் பரப்பளவின் இரு மடங்காகும் என நிறுவுக.

3. முக்கோணி PQR இல் $P\hat{Q}R = 90^0$ ஆகும். QR இன் நடுப்புள்ளி X ம் PQ இன் நடுப்புள்ளி Y யும் ஆகும். எனின்,
$6PR^2 = 4\left(PX^2 + RY^2\right)$ என நிறுவுக.

4. O என்பது முக்கோணி ABC இற்கு வெளியில் உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். OX, OY, OZ ஆகியவை முறையே BC, CA, AB என்பவற்றிற்கு O லிருந்து வரைந்த செங்குத்துகளாகும். $AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + CY^2 + BZ^2$ எனக் காட்டுக.

5. முக்கோணி ABC இல் AD என்பது BC இற்கு செங்குத்தாகும். $AD = p$ ஆகும்.
   (i) $a = 25cm,\ \ p = 12cm,\ \ \mathrm{BD} = 9cm$ எனின் b, c ஐயும்
   (ii) $b = 82cm,\ \ \mathrm{c} = 1m,\ \ \mathrm{BD} = 60cm$ எனின் p, a ஐயும் காண்க.
   மேலும்
   (iii) $\sqrt{b^2 - p^2} + \sqrt{c^2 - p^2} = a$ எனக் காட்டுக.

6. ABC ஓர் செங்கோண முக்கோணியாகும். ஆகும். $A\hat{C}B = 90^0$ ஆகும். p என்பது C இலிருந்து AB இற்கு வரையும் செங்குத்தாகும். முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவை கருத்திற் கொண்டு $pc = ab$ எனக் காட்டுக.

   இதிலிருந்து $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$ எனக் காட்டுக.

8. AD என்பது முக்கோணி ABC இல் ஓர் இடையமாகும். $BX = XD$ ஆகவும் $A\hat{X}B=90^0$ ஆகவும் இருக்குமாறு X என்பது, BC இன் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாகும் $4\left(AC^2-AD^2\right)=BX^2$ எனக் காட்டுக.

9. முக்கோணம் ABC இல் A ஒரு செங்கோணமாகும். $CD = 2BC$ ஆகுமாறும $A\hat{C}D=90^0$ ஆகுமாறும் C என்பது BD இன் மீதும் உள்ளது. CT என்பது ACD இன் ஒரு இடையம் எனின் $AD^2 = 2\left(CT^2 + AT^2\right)$ எனக் காட்டுக.

10. முக்கோணி ABC இல் E,D என்பன பக்கம் BC ஐ முக்கூறிடுகின்றது $AB^2 + AE^2 = AC^2 + AD^2$ எனக் காட்டுக.

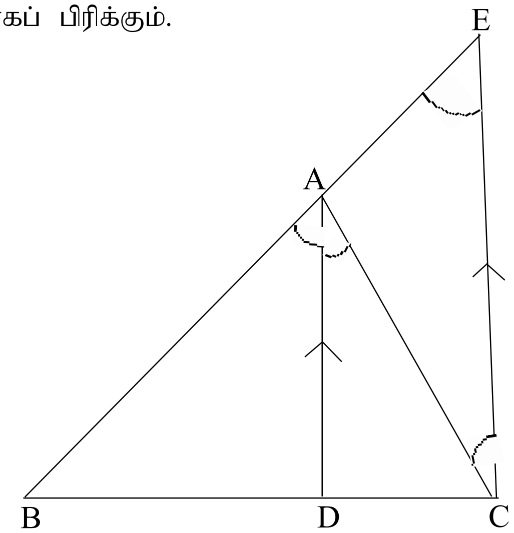
11. முக்கோணி ABC இல் BC இன் நடுப்புள்ளி D ஆகும். AB=4cm, BC=5cm, AC=6cm எனின் இடையம் AD இன் நீளத்தைக் காண்க.

9. இருகூறாக்கித்தேற்றம்

தேற்றம்

(a) முக்கோணியொன்றின் ஒரு கோணத்தின் உள்ளிரு கூறாக்கியானது, எதிர்ப்பக்கத்தை, அக்கோணத்தைக் கொண்டிருக்கும் பக்கங்களின் விகித்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும்.

(b) முக்கோணியொன்றின் ஒரு கோணத்தின் வெளி இருகூறாக்கியானது, எதிர்ப்பக்கத்தை அக்கோணத்தைக் கொண்டிருக்கும் பக்கங்களின் விகித்தில் வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கும்.



தரவு : முக்கோணி ABC இன் கோணம் BAC இன் இருகூறாக்கி BCஐ Dயில் சந்திக்கிறது.

நிறுவ வேண்டியது : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

கருவி : C க் கூடாக DA இற்கு சமாந்தரமாக வரையப்பட்ட கோடு CE நீட்டிய BA ஐ E இல் சந்திக்கிறது.

நிறுவல் : $AD \parallel EC$

$\angle DAC = \angle ACE$ (ஒன்றுவிட்ட கோணம்)

$\angle BAD = \angle AEC$ (ஒத்த கோணம்)

$\angle DAC = \angle BAD$ (தரவு)

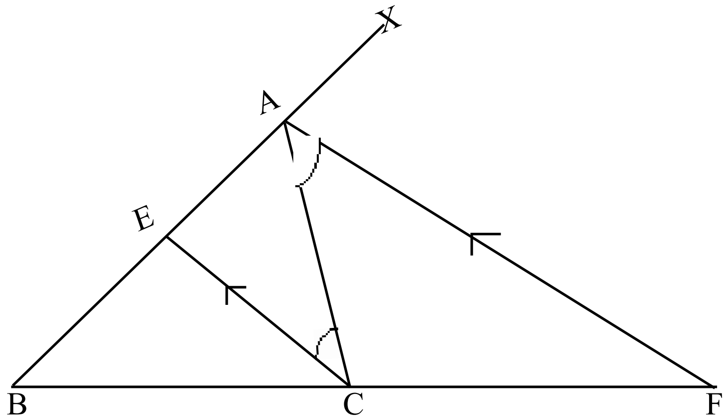
ஆகவே, $\angle ACE = \angle AEC$

$AE = AC$

முக்கோணி BCE இல் $AD \parallel EC$

$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC}$, மேலும் $AE = AC$

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$



தரவு : முக்கோணி ABC யில் வெளி இருகூறாக்கி AF நீட்டப்பட்ட BCஐ F யில் சந்திக்கிறது.

நிறுவ வேண்டியது : $\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CF}$

கருவி : FA இற்கு சமாந்தரமாக C யிற்கூடாக வரையப்பட்ட நேர்கோடு AB ஐ E இல் சந்திக்கிறது.

நிறுவல் : $CE \parallel FA$

$\angle ECA = \angle CAF$ (ஒன்றுவிட்ட கோணம்)

$\angle CEA = \angle FAX$ (ஒத்த கோணம்)

ஆனால் $\angle CAF = \angle FAX$

ஆகவே, $\angle ECA = \angle CEA$

$AE = AC$

முக்கோணி ABF இல் $CE \| FA$

$$\frac{BF}{CF} = \frac{BA}{EA}, \text{ மேலும் } AE=AC$$

$$\frac{BF}{CF} = \frac{BA}{AC}$$

பயிற்சி

(1) நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் $PQ // SR$ ஆகும் PR, QR என்பன T இல் இடைவெட்டுகின்றன. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\Delta PQT /// \Delta SRT$

(i) $\frac{PR}{PT} = \frac{QS}{QT}$

(2) முக்கோணி ABC யில் கோணம் BAC இன் உள்ளிருகூறாக்கி வெளியிரு கூறாக்கி என்பன முறையே BC ஐ X இலும் Y இலும் வெட்டுகின்றன. $AB = 7.2cm, AC = 5.4cm, BC = 3.5cm$ எனின்,

(i) BX: XC எனக் காட்டுக.

(ii) BY : YC எனும் விகிதத்தைக் காண்க.

(3) முக்கோணி PQR இல் PS என்பது ஓர் இடையமாகும். கோணங்கள் PSQ, PSR என்பனவற்றின் இருகூறாக்கிகள் PQ, PR என்பனவற்றை முறையே L,M என்பனவற்றிற் சந்திப்பின் LM , QR இற்குச் சமாந்தரம் எனக் காட்டுக.

(4) நாற்பக்கல் ABCD இல் கோணங்கள் BAC, DAC என்பனவற்றின் இருகூறாக்கிகள் BC, CD என்பனவற்றை முறையே H,K என்பனவற்றில் சந்திக்கின்றன. BD//HK என நிறுவுக.

(5) I என்பது முக்கோணி PQR இன் உள்மையமாகும். நீட்டப்பட்ட PI, பக்கம் QRஐ X இல் சந்திக்கின்றது.

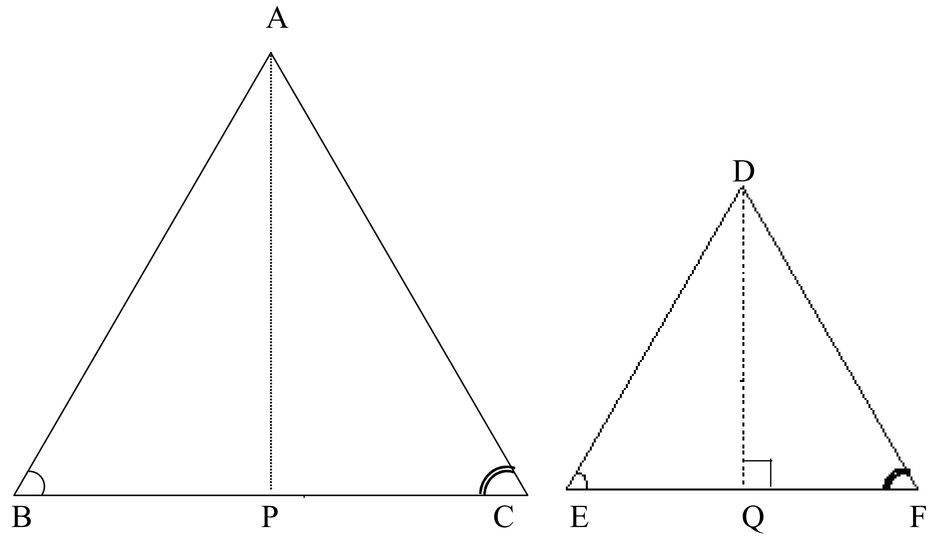
$PI : IX = (PQ + PR) : QR$ எனக் காட்டுக.

(6) AD என்பது ABC என்னும் முக்கோணியின் ஓர் இடையம் ஆகும் E என்பது நீட்டப்பட்ட ADஇன் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். கோணங்கள் BDE, CDE என்பனவற்றின் இருகூறாக்கிகள் நீட்டப்பட்ட AB, AC என்பனவற்றை முறையே H,K என்பனவற்றில் வெட்டிள் HK//BC என நிறுவுக.

10. பரப்பளவு (இயல்பொத்த முக்கோணங்கள்)

தேற்றம்

இரண்டு இயல்பொத்த முக்கோணிகளின் பரப்பளவுகளிடையேயான விகிதம், அவற்றின் ஒத்த பக்கங்களிலுள்ள சதுரங்களின் விகிதத்திற்கு சமமாகும்.



தரவு : ABC, DEF என்பன இயல்பொத்த முக்கோணிகளாகும்.

நிறுவ வேண்டியது : $\dfrac{\Delta\, ABC\text{யின் பரப்பளவு}}{\Delta\, DEF\text{இன் பரப்பளவு}} = \dfrac{BC^2}{EF^2}$

கருவி : AP, DQ என்பன முறையே BC, EF இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்களாகும்.

நிறுவல் : முக்கோணிகள் APB, DQE என்பனவற்றில்

$\angle ABP = \angle DEQ$ (தரவு)

$\angle APB = \angle DQE$ (=90)

எனவே ஒவ்வொன்றிலும் மூன்றாம் கோணங்கள் சமமாகும்.
முக்கோணிகள் APB, DQE இயல்பொத்தவை.

Δ APB, ΔDQE ///

$$\frac{AP}{DQ}=\frac{AB}{DE}$$

ஆனால் $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$ (ΔABC, ΔDEF இயல் பொத் தவை)

ஆகவே $\frac{AP}{DQ}=\frac{BC}{EF}$

இப்பொழுது $$\frac{\Delta\ \text{ABCயின் பரப் பளவு}}{\Delta\ \text{DEFஇன் பரப் பளவு}}=\frac{\frac{1}{2}\times BC\times AP}{\frac{1}{2}\times EF\times DQ}$$

$$=\frac{BC}{EF}\times\frac{AP}{DQ}$$

$$=\frac{BC}{EF}\times\frac{BC}{EF}$$

$$=\frac{BC^2}{EF^2}$$

பயிற்சிகள்

(1) ABC என்பது Aஇல் செங்கோணமுடைய ஒரு செங்கோண முக்கோணி ஆகும். AD என்பது BCஇற்கு செங்குத்தாயின்
$\Delta ABD : \Delta ACD = BA^2 : AC^2$

(2) ABCD எனும் சரிவகத்தில் AB, CD என்பன சமாந்தரமாகும். AC, BD என்பன Oஇல் வெட்டுகின்றன. $AO = \frac{1}{4} AC$ ஆயின் $\Delta AOB = \frac{1}{9} \Delta COD$ எனக் காட்டுக.

(3) ABC என்பது Aஇல் செங்கோணமுடைய ஓர் இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணியாகும். AB, BC என்பனவற்றில் முக்கோணிக்கு வெளியே ABD, BCE எனும் சமபக்க முக்கோணிகள் வரையப்பட்டுள்ளன. $\Delta ABD : \Delta BCE = 1 : 2$ எனக் காட்டுக.

(4) சரிவகம் ABCD யில்AB, CD என்பன சமாந்தரமாகும். மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று Oவில் இடைவெட்டுகின்றன. AB=2CD எனின் முக்கோணங்கள் AOB, COD என்பனவற்றின் பரப்பளவுக்கு இடையேயுள்ள விகிதத்தைக் காண்க.

(5) முக்கோணி ABCஇல் பக்க BCஇற்கு சமாந்தரமாக XY வரையப் பட்டுள்ளது. XY ஆனது AB ஐ Xஇலும் AC ஐ Yஇலும் சந்திக்கிறது. ΔAXY : நாற்பக்கல் $XBCY$ = 4:5 எனின் AX:XB=2:1 எனக் காட்டுக.

(6) ABC என்பது ஒரு கூர்ங்கோண முக்கோணியாகும். BD, CE என்பன முக்கோணியின் குத்துயரங்களாகும். BD, CE என்பன X இற் சந்திக்கின்றன. இதனை உபயோகித்து கீழுள்ள இடைவெளிகளை நிரப்புக.

I $\Delta ABC : \Delta ACE = BD^2 :$ ....

II $\Delta BXE : \Delta ACE =$ .... $: CD^2$

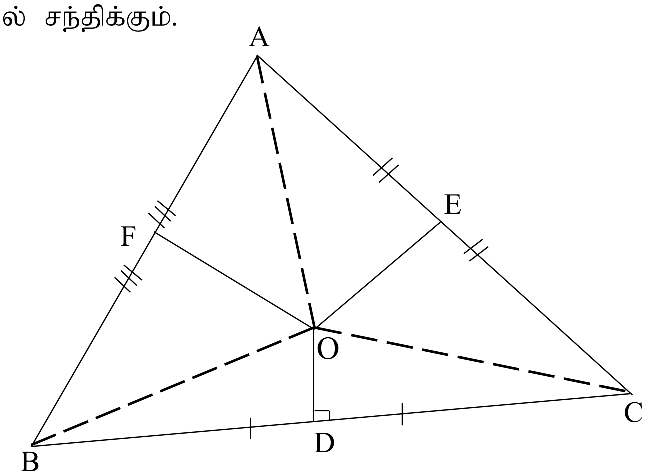
III $\Delta ABD :$ ....$= AD^2 : AE^2$

IV $\Delta BXE :$ ......$= BX^2 : CX^2$

முக்கோணித தொடர்புள்ள ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் நேர்கோடுகள்

1. பக்கங்களின் செங்குத்து இருகூறாக்கிகள்.

முக்கோணி ஒன்றின் பக்கங்களின் செங்குத்து இரு கூறாக்கிகள் மூன்றும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.



தரவு : முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் BC,CA என்பவற்றின் செங்குத்து இருகூறாக்கிகள் DO, EO என்பன O வில் சந்திக்கின்றன. ABயின் நடுப்புள்ளி Fஆகும். OFஐ இணைக்க.

நிறுவ வேண்டியது : OF, ABயிற்குச் செங்குத்து,

நிறுவல் : முக்கோணி BOD, COD என்பவற்றில்

BD = CD (தரவு)

OD = OD (பொது)

$\angle BDO = \angle CDO$ (தரவு)

$\Delta BOD \equiv COD$ (ப,கோ,ப)

ஆகவே OB = OC ———— (1)

இவ்வாறே $\Delta OCE = \Delta OAE$

OC = OA ———— (2)

(1) (2) இலிருந்து OA = OB

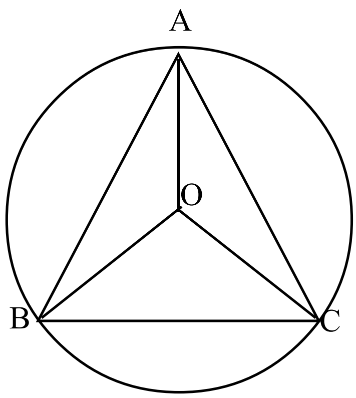
முக்கோணிகள் OAF, OBF என்பவற்றில்

OA = OB (தரவு)
OF = OF (பொது)
AF = FB (தரவு)
Δ OAF $\equiv$ ΔOBF (ப,ப,ப)
ஆகவே $\lfloor$OAF = $\lfloor$OBF = 90^0

எனவேOF, AB யிற்கு செங்குத்து,

இதிலிருந்து, முக்கோணியொன்றின் மூன்று பக்கங்களினதும் செங்குத்து இருகூறாக்கிகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

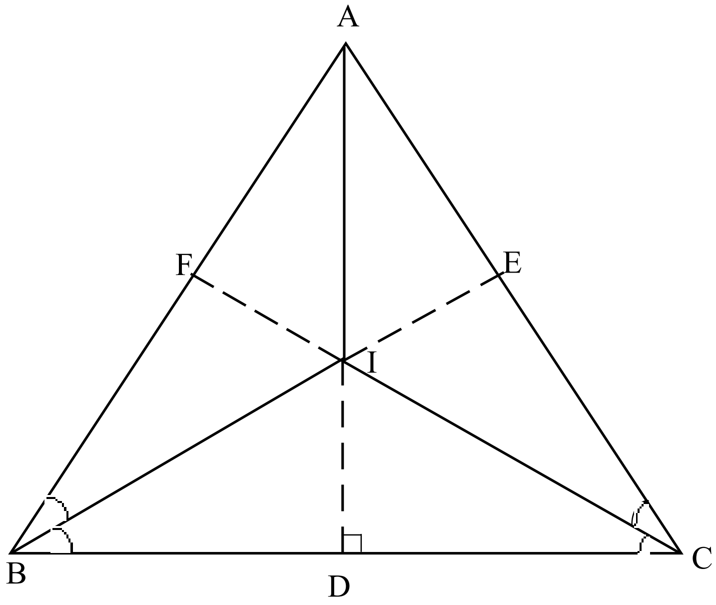
இப்படத்தில் OA = OB = OC



குறிப்பு : O என்பது முக்கோணி ABC யின் சுற்றுவட்ட மையம் எனப்படும். இவ்வட்டம் முக்கோணி ABCயின் சுற்றுவட்டம் எனப்படும்.

2. கோணங்களின் இருகூறாக்கிகள்

முக்கோணியொன்றின் மூன்று கோணங்களினதும் இருகூறாக்கிகள் ஒருபுள்ளியில் சந்திக்கும்.



தரவு : முக்கோணி ABC யின் கோணங்கள் ABC, ACB இன் இருகூறாக்கிகள் IB, IC ஆகும். AIஐ இணைக்க.

நிறுவ வேண்டியது : AI கோணம் BAC ஐ இருகூறாக்கிறது.

கருவி : BC, CA, AB என்பவற்றிற்கு செங்குத்துக்கள் ID, IE, IF என்பவற்றை வரைக.

நிறுவல் : முக்கோணிகள் BDI, BFI என்பவற்றில்

$\angle IBD = \angle IBF$ (தரவு)

$\angle BDI = \angle BFI$ (அமைப்பு)

$BI = BI$ (பொது)

$\Delta BDI \equiv \Delta BFI$ (ப, கோ, ப)

$ID = IF$ ———— (1)

இவ்வாறே $\Delta ODI \equiv \Delta CEI$ என நிறுவலாம்.

$ID = IE$ ———— (2)

(1) (2) இலிருந்து IE = IF

முக்கோணிகள் AEI, AFI என்பவற்றில்

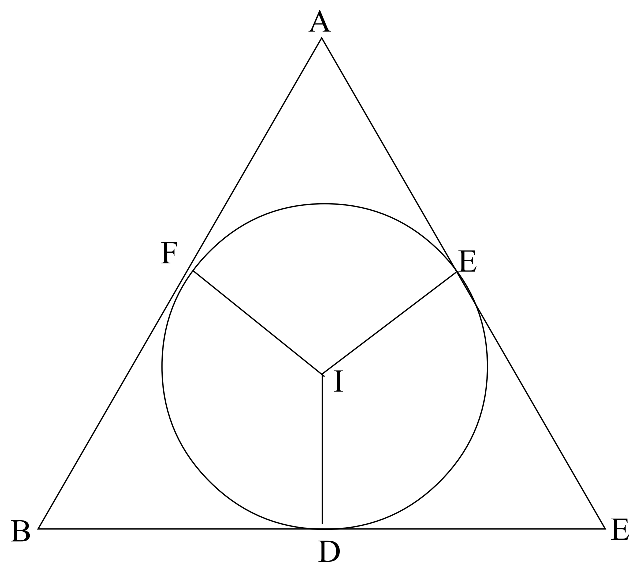
IE = IF (தரவு)
IA = IA (பொது)
$\lfloor IEA = \lfloor IFA \quad (= 90^0)$
$\Delta\ AEI \equiv \Delta\ AFI$ (செ.ப,ப)

ஆகவே $\lfloor EAI = \lfloor FAI$

IA ஆனது கோணம் BACயின் இருகூறாக்கியாகும்.

எனவே முக்கோணியொன்றின் கோணங்களின் இருகூறாக்கிகள் மூன்றும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

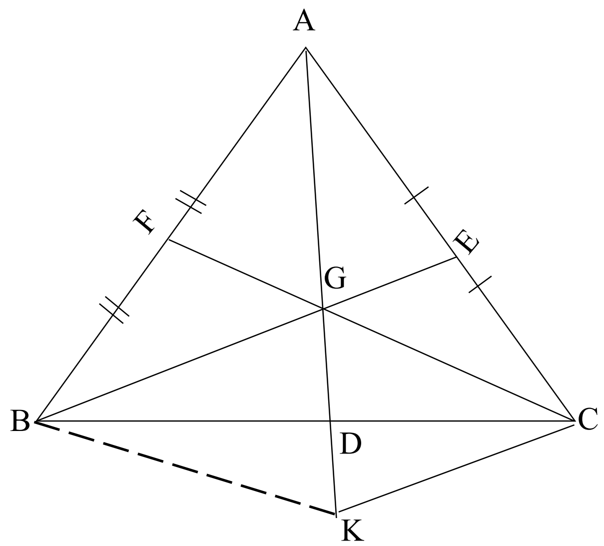
ஆரை ID = IE = IF ஆகும்.



குறிப்பு : I என்பது முக்கோணியின் உள்வட்ட மையம் எனப்படும். இவ்வட்டம் முக்கோணத்தின் உள்வட்டம் எனப்படும்.

3. இடையங்கள்

முக்கோணியொன்றின் மூன்று இடையங்களும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.



தரவு : E,F என்பன முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் AC, AB என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள். BE, CF என்பன G இல் சந்திக்கின்றன. AG ஐ இணைத்து BCஐ D இல் சந்திக்குமாறு நீட்டுக.

நிறுவ வேண்டியது : BD = DC

கருவி : C இற்கு கூடாக, EB க்கு சமாந்தரமாக வரையப்படும் நேர்கோடு CK நீட்டப்பட்ட ADஐ Kஇல் சந்திக்கிறது. BKஐ இணைக்க.

நிறுவல் : முக்கோணி AKC இல்

AE=EC (தரவு)

EG || CK (கருவி)

ஆகவே AG = GK

முக்கோணி ABK இல்,

AF = FB (தரவு)

AG = GK (நிறுவப்பட்டது)

எனவே, $FG \parallel BK$

நாற்பக்கல் $CGBK$ இல்

$CK \parallel GB$

$BK \parallel GC$

ஆகவே, CGBK இணைகரம்.

இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருகூறிடும்.

$$BD = DC$$

$$GD = DK$$

$BD = DC$ என்பதால் AD என்பது இடையம் ஆகும்.

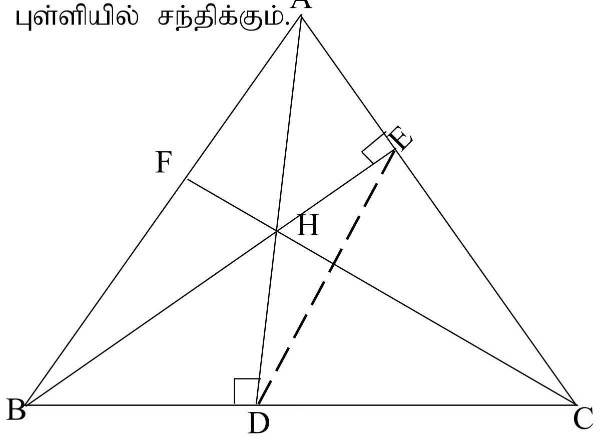
எனவே, முக்கோணியின் மூன்று இடையங்களும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

மூன்று இடையங்களும் சந்திக்கும் புள்ளி G முக்கோணியின் மையப் போலி எனப்படும்.

$$AG : GD = BG : GE = CG : GF = 2 : 1$$

4. செங்குத்துக்கள்.

முக்கோணி ஒன்றின் உச்சியிலிருந்து எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.



தரவு : முக்கோணி ABC யின் உச்சிகள் A, B என்பவற்றிலிருந்து எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கள் AD, BE என்பன Hஇல் சந்திக்கின்றன. CH ஐ இணைத்து ABஐ Fஇல் சந்திக்குமாறு நீட்டுக.

நிறுவ வேண்டியது : CF, AB க்கு செங்குத்து.

கருவி : DE ஐ இணைக்க.

நிறுவல் : நாற்பக்கங்கல் DCEH இல்

$$\angle CDH + \angle CEH = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

எனவே, DCEH வட்ட நாற்பக்கங்கள் A.

$\angle DEC = \angle DHC$ (ஒரே துண்டக் கோணங்கள்)——(1)

$\angle DHC = \angle AHF$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

$\angle AEB = \angle ADB (= 90^0)$ என்பதால்,

AEDB வட்ட நாற்பக்கல்

—

$\underline{|ABD} = \underline{|DEC}$ (புறக்கோணம் = அகத்தெதிர்க் கோணம்) (2)

(1), (2) இலிருந்து $\underline{|ABD} = \underline{|DHC}$

எனவே, BDHF- வட்ட நாற்பக்கல்

$\underline{|HDB} + \underline{|HFB} = 180^0$

$\underline{|HFB} = 90^0$

CF, AB யிற்குச் செங்குத்து

எனவே, முக்கோணியின் உச்சிகளிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துகள் AD, BE, CF என்பன H இல் சந்திக்கும்

H நிமிர்மையம் எனப்படும்.

1. முக்கோணம் ABC யில் பக்கங்கள் AB, AC என்பன நீட்டப்பட்டுள்ளன. B,C யிலுள்ள புறக்கோணங்களின் இருகூறாக்கிகளும் அகக்கோணம் Aயில் இருகூறாக்கியும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக.

12. விடைகள்

12. 1

1. $4a^2+12ab+9b^2$

2. $9a^2-24ab+16b^2$

3. $x^2+2+\frac{1}{x^2}$

4. $4x^2y^2+20xyz+25z^2$

5. $\frac{1}{a^2}+\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}$

6. $x^2-2+\frac{1}{x^2}$

7. $\frac{a^2}{4}-2+\frac{4}{a^2}$

8. $\frac{1}{a^2}-\frac{4}{ab}+\frac{4}{b^2}$

9. $16x^2y^2-24xyz+9z^2$

10. $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$

11. $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$

12. $27a^3+54a^2b+36ab^2-8b^3$

13. $27x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}$

14. $x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$

15. $a^3b^3-6a^2b^2c+12abc^2-8c^3$

16. $\frac{1}{a^3}+\frac{3}{a^2b}+\frac{3}{ab^2}+\frac{1}{b^3}$

17. $\frac{1}{a^3}-\frac{6}{a^2b}+\frac{12}{ab^2}-\frac{8}{b^3}$

18. $8x^3y^3-36x^2y^2z+54xyz^2-27z^3$

19 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

20 $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$

21 $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac$

22. $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac$

23. $a^2+46^2+c^2-4ab-4bc+2ac$

24. $a^2+b^2+4c^2-2ab+4bc-4ac$

25. (i) 1 030 301. (ii) 7 762 392
(iii) 64 481 201 (iv) 997 002 299

26. (a) 4 000 000 (b) 1

27. (a) 1 000 000 (b) 8

28

29. (a) $a^2 - 2$ (b) $8 - 3a$

30. 316

31. $-\frac{1}{27}$ 32. -340 34. 14

35. 27 36. 427

12. 2. a

1. $(x-3)(x+2)$
2. $(x+12)(x-8)$
3. $(x+6)(x-1)$
4. $(x-6)(x+2)$
5. $(x+7)(x-6)$
6. $(x-3)(x-6)$
7. $(2x+3)(x+1)$
8. $(2x-3)(x-1)$
9. $(2x-1)(x+3)$
10. $(2x+1)(x-3)$
11. $(2-3x)(5+4x)$
12. $(5-2x)(3-x)$
13. $3\ (3x+8)(2x-9)$
14 $(2x-9)(3x-14)$
15. $(2x-3y)(x-y)$
16. $(3x+2y)(2x-3y)$
17. $(2x+y)(2x+3y)$
17. $(2x+y)(2x+3y)$
18. $(2a-b)(a-13b)$
19. $(8xy-3)(5xy+48)$
20. $(8x+5y)(4x-7y)$
21. $a\ (8a+5b)(3a-4b)$
22. $a\ (3a+2b)(6a-5b)$

23. $(a-2)(a-1)(a-8)(a+5)$

24. $(a+b+c-7)(a+b+c+4)$ 25.

$(2x+2y-9)(x+y+3)$

26. $(x+8y)(x+3y)$ 27. $(x-a+2)(x+a-1)$

28. $(x+a-2)(x-a+1)$ 29. $(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)$

30. $(x+a+b)(x+a-b)$ 31. $(ax-1)(x+b)$

32. $(x+3a-b)(x-2a+b)$

33. $(2a^2+ab-2b^2)(2x-2a+b)$ 34. $(a+12b)(12a-b)$

35. $(5x-y)(5y-x)$

12. 2. b

01. $(x-2y)(x+2y)$ 2. $x(x-1)(x+1)$

3. $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 4. $x(x-1)(x+1)(x^2+1)$

5. $(2-3a)(2+3a)$ 6. $(a-7b)(a-b)$

7. $(4-a-b)(4+a+b)$ 8. $(3-a+b)(3+a-b)$

9. $3a(2a-b)(2a+b)$ 10. $(1-a+b)(1+a-b)$

11. $(1-a-b)(1+a+b)$ 12. $(x+y)(x-y-1)$

13. $(x-y)(x+y-1)$ 14. $(x+y)(x-y+1)$

15. $(x-y)(x+y+1)$ 16. $(a-b)(a+b-4)$

17. $(a-2-b)(a-2+b)$ 18. $(b+c)(a-b-c)$

19. $(a-b)(a+b+1)$ 20. $(x^2-y^2-xy)(x^2+y^2+xy)$

21. $(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)$ 22. $(a^2+3b^2-ab)(a^2+3b^2+ab)$

23. $(x-2y-z)(x-2y+z)$ 24. $(2a+b-x)(2a+b+x)$

25. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ 26.

$(2a+3b-ab)(2a+3b+ab)$

27. 199 28. 8800

29. 95.2 30. 24

31. 9901 32. 186

33. 144 34. 1

35. 0.25 36. 9991

12. 2. c

1. $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$

2. $(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$

3. $(5a-4b)(25a^2+20ab+16b^2)$

4. $(2ab-c)(4a^2b^2+2abc+c^2)$

5. $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)$

6. $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)$

7. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)$

8. $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)$

9. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac+2bc)$

10. $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab-2bc+ac)$

11. $(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab-ac-2bc)$

12. $(x+2y)(7x^2-8xy+4y^2)$

13. $2a(a^2+3b^2)$

14. $2b(3a^2+b^2)$

15. $(a+b)(2a+2b+1)(4a^2+4b^2+8ab-2a-2b+1)$

16. $(x-y)(x+y)(x^4+x^2y^2+y^2)$

17. $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

18. $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^4+3x^2+9)$

19. $(a)\ (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab-ac-bc)$

$(c)\quad (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

$(i)\quad (x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$

$(ii)\quad (2x+y+g)(4x^2+y^2+g^2-2xy-2xg-yg)$

$(iii)\quad (x+2y-3z)(x^2+4y^2+9z^2-2xy+3xz+6yz)$

$(iv)\quad (a-4b)(a^2+7b^2+4ab)$

$(v)\quad (2a+b-1)(4a^2+b^2-2ab+b+2a)+1$

20. $(i)\ 3(a-b)(b-c)(c-a)$

$(ii)\ 6(2x-3y)(3y-4z)(2z-x)$

$(iii)\ abc(b-c)(c-a)(a-b)$

$(iv)\ 3(x-3y)(3y-4z)(4z-x)$

12. 3. a

1. $\dfrac{x+1}{2}$

2. $\dfrac{-1}{(x+4)(x+5)}$

3. $\dfrac{x+4}{(x-3)(x+2)(x+5)}$

4. $\dfrac{3}{(x-3)}$

5. $\dfrac{x^2+3}{x+1}$

6. 0

7. $\dfrac{-x-2}{(2x-1)(2x+1)(x-1)}$

8. $\dfrac{4(a+1)}{(a-5)(a-4)(a+3)}$

9. $\dfrac{a^2+4}{a^2-4}$

10. $\dfrac{2}{x^2-1}$

11. $\dfrac{a}{a-c}$

12. 2

13. $\dfrac{a^2-1}{a^2-4}$

14. $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2-b^2}$

15. $\dfrac{1}{2a(a+b)}$

16. $\dfrac{a+1}{a-1}$

17. $\dfrac{x(x-y+z)}{z(x+y+z)}$

18. $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$

19. $z = \dfrac{x^4+x^2+1}{x(x^2+1)}$

20. $\dfrac{2t}{1+t^2}$

21. $\dfrac{2a}{1-a^2}$

22. $\dfrac{7c+4}{5c+1}$

12. 4. 1. a

1. $-\frac{3}{2}$ அல்லது 1.5

2. 4

3. 37

4. (-10)

5. $\frac{156}{23}$

6. - 10

7. 8

8. $-\frac{13}{12}$

9. -3

10. (-2)

12. 4. 1. b

1. $x = 0$ அல்லது $x = \frac{2}{3}$

2. $-1, -3$

3. 2 , 6

4. $-\frac{1}{2}, 3$

5. $-\frac{1}{2}, 2$

6. W

7. $-12, 9$

8. $\frac{5}{2}, 6$

9. $-1, \frac{3}{2}$

10. 0, 4

11. $-17, -1$

12. $-3, \frac{7}{2}$

13. $3+\sqrt{14}, 3-\sqrt{14}$

14. $-\frac{7-\sqrt{89}}{4}, \frac{-7+\sqrt{89}}{4}$

15. $\frac{+3-\sqrt{65}}{4}, \frac{+3+\sqrt{65}}{4}$

16. $\frac{5-\sqrt{29}}{2}, \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

12. 4. 1. c

(1) $-4,-3,-2,-1$ (2) $2,7$

(3) $1,2,-3\pm\sqrt{7}$ (4) $-\frac{3}{4},-\frac{2}{3}$

(5) $-\frac{62}{9},2$ (6) 4 , 36

(7) 20, 125 (8) $\frac{1}{4},4$

(9) $-8,1$ (10) $\frac{1}{27},8$

(11) $-\frac{2}{5},1,-\frac{36-2\sqrt{15}}{11},\frac{-36+2\sqrt{15}}{11}$ (12) $-\frac{4}{5},\ \frac{9}{4}$

(13) $-6,0,\frac{-4-3\sqrt{2}}{2},\ \frac{-4+3\sqrt{2}}{2}$

(14) $\frac{-1}{2},2\frac{-17+\sqrt{305}}{4},\ \frac{-17-\sqrt{305}}{4}$ (15) 1

(16) $\frac{1}{3},3$ (17)

(18) $\frac{1}{3},1,3$ (19) 1/3 , 1, 3

(20) $-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},2,4,$ (21) $-1,-\frac{1}{2},1,2$

(22) $-2,0$ (23) $-1\ ,2$

(24) $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$ (25) -2

(26) $3,\ \frac{83}{17}$ (27) $3,\ 7$

(28) $-3,\ 3$ (29) $-3,\ 2,\ 7$

(30) $\frac{1}{2},2$ (31) $\frac{-5+\sqrt{5}}{2},\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$

12. 4. 2

(1) $x=-2, y=3$ (2) $x=1, y=-2$

(3) $x=3, y=-1$ (4) $x=2,\ y=-1$

(5) $x=5,\ y=\frac{1}{2}$ (6) $x=\frac{1}{7},\ y=\frac{1}{4}$

(7) $x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{3}$ (8) $x=-1,\ y=-\frac{2}{5}$

(9) $x=11,\ y=\frac{1}{2}$ (10) $x=2,\ y=-1$

(11) $x=a-b,\ y=b-a$ (12) $x=\frac{1}{4}\quad,\ y=-1$

(13) $x=5,\ y=-9$ (14) $x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{4}$

(15) $x=\frac{\left(a^2+b^2\right)}{2ab},\ y=\frac{-\left(a^2-2ab-b^2\right)}{2ab}$

12. 4. 3

(1) $\left.\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ y=o \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-1 \end{array}\right\}$ (2) $\left.\begin{array}{l} x=-7 \\ y=-4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=7 \\ y=3 \end{array}\right\}$

(3) $\begin{array}{l} x=5 \\ y=-\frac{5}{3} \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} x=7 \\ y=-3 \end{array}\right\}$ (4) $\left.\begin{array}{l} x=-4 \\ y=8 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}\right\}$

(5) $\left.\begin{array}{l} x=8 \\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ y=12 \end{array}\right\}$ (6) $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{3}{2} \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{5} \\ y=\frac{13}{10} \end{array}\right\}$

(7) $\left.\begin{array}{l} x=4 \\ y=3 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=4 \\ y=-3 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{4} \\ y=-3 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-\sqrt{2} \\ y=-3 \end{array}\right\}$

(8) $\left.\begin{matrix} x=\frac{1}{5} \\ y=\frac{3}{5}\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=3\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=-6\pm\sqrt{143} \\ y=6\pm\frac{\sqrt{143}}{2}\end{matrix}\right\}$

(9) $\left.\begin{matrix} x=\frac{-5}{2} \\ y=\frac{-5}{2}\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=1\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=-1\mp\sqrt{21} \\ y=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}\end{matrix}\right\}$

(10) $\left.\begin{matrix} x=-\frac{5}{2} \\ y=-\frac{5}{2}\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=1\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=-1\mp\sqrt{21} \\ y=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}\end{matrix}\right\}$

(11) $x=\frac{-2}{5}, x=1, x=\frac{-18\pm\sqrt{5}}{11}$

(12) $x=\frac{-4}{5},\frac{9}{5}$

(13) $\left.\begin{matrix} x=-6 \\ y=\frac{5}{8}\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=3 \\ y=4\end{matrix}\right\}$

(14) $x=\frac{84}{25}, y=-25$

(1 5) $\left.\begin{matrix} x=\frac{16}{9} \\ y=\frac{-3}{4}\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=3 \\ y=\frac{-5}{3}\end{matrix}\right\} x$

(16) $x=\frac{1}{3}, 3$

(17) $x=\frac{10}{3},\ y=\frac{106}{33},\ z=\frac{52}{33}$ (18) $x=1,\ y=2,\ z=-6$

(19) (20)

(21) $\left.\begin{array}{l} x=4 \\ y=3 \\ z=5 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-6 \\ y=1 \\ z=-3 \end{array}\right\}$

12.5

(1) $(a)\ 6$ $(b)\ \frac{1}{6}$ $(c)\ \frac{1}{3}$ $(d)\ \frac{1}{5}$

(2) $(a)\ \frac{1}{100}$ $(b)\ \frac{1}{100}$ $(c)\ \frac{3}{2}$

(3) $(a)\ 216$ $(b)\ 13$ $(c)\ 5$

(4) 36

(5) $(a)\ 4$ $(b)\ \frac{1}{4}$ $(c)\ \frac{3}{7}$ $(d)\ b$ $(e)\ 4,-2$

$(f)\ o,1$

(6) $(a)\ 4$ $(b)\ 4$ $(c)\ 4$ $(d)\ 3$

(7) $(a)\ 1$ $(b)\ -1$ $(c)\ \frac{3}{2}$ $(d)\ 2$

(8) $(a)\ \frac{1}{6}$ $(b)\ \frac{4}{3}$ $(c)\ -2$

(9) $(a)\ -2$ $(b)\ \frac{1}{3}$