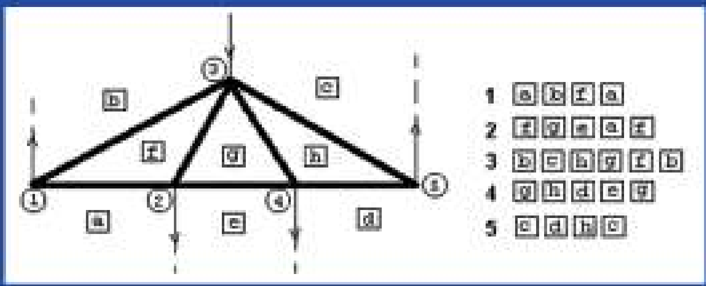
අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ)

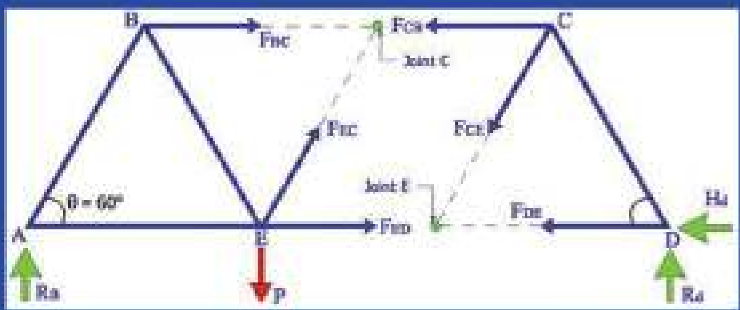
සංයුක්ත ගණිතය

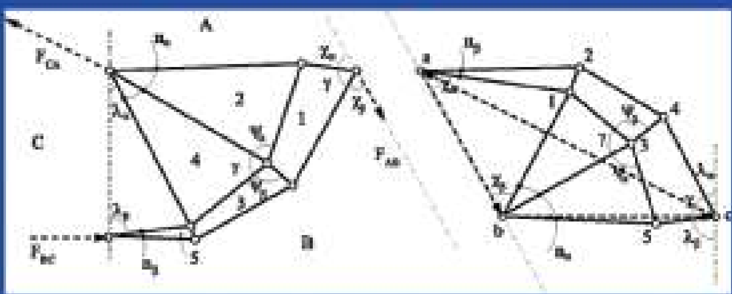
ස්ථිතිකය - II

අතිරේක කියවීම් පොත

(2017 නව විෂය නිර්දේශයට අනුව සකස් කරන ලදී)







ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
විද්‍යා හා තාක්ෂණ පීඨය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
ශ්‍රී ලංකාව
www.nie.lk

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ)

සංයුක්ත ගණිතය

ස්ථිතිකය - II

අතිරේක කියවීම් පොත

(2017 නව විෂය නිර්දේශයට අනුව සකස් කරන ලදී)

ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
විද්‍යා හා තාක්ෂණ පීඨය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
ශ්‍රී ලංකාව
www.nie.lk

සංයුක්ත ගණිතය
ස්ථිතිකය -II

ප්‍රථම මුද්‍රණය 2019

ISBN 978-955-654-721-4

ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
විද්‍යා හා තාක්ෂණ පීඨය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය

මුද්‍රණය :
මුද්‍රණාලය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
මහරගම

අධ්‍යක්ෂ ජනරාල්තුමියගේ පණිවිඩය

ගණිත අධ්‍යාපනය සංවර්ධනය කිරීම සඳහා ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනයේ ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව විසින් කාලෝචිත ව විවිධ ක්‍රියා මාර්ග අනුගමනය කරමින් සිටී. ''**සංයුක්ත ගණිතය, ස්ථිතිකය - II**'' නමින් රචිත පොත එහි එක් ප්‍රතිඵලයකි.

දොළහ සහ දහතුන්වන ශ්‍රේණිවලවල විෂය නිර්දේශ හැදෑරීමෙන් පසු පැවැත්වෙන අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය සඳහා සිසුන් සූදානම් කිරීම පාසලේ ගුරුවරයාට පැවරෙන ප්‍රධාන කාර්යයකි. මේ සඳහා යෝග්‍ය ඇගයීම් උපකරණ බෙහෙවින් විරල වේ. වෙළෙඳපොලේ පවත්නා බොහොමයක් උපකරණ වලංගු බවින් හා ගුණාත්මක බවින් ඌන ප්‍රශ්නවලින් සමන්විත ප්‍රශ්න පත්‍රවලින් යුක්ත බව නොරහසකි. මෙම තත්ත්වය වළක්වා සිසුන්ට විභාගයට මනා ලෙස සූදානම් වීම සඳහා ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනයේ ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව මෙම සංයුක්ත ගණිතය ''**ස්ථිතිකය - II**'' සකස් කර ඇත. මෙය විෂය නිර්දේශයට අනුව සකසා, පූර්ව පරීක්ෂණයන්ට ලක් කර කරන ලද වටිනා ප්‍රශ්න ඇතුළත් ග්‍රන්ථයකි. ප්‍රශ්න සමඟ ඒවායේ උත්තර ඇතුළත් කර තිබීම ගුරුවරුන්ට මෙන් ම සිසුන්ට ද බෙහෙවින් ප්‍රයෝජනවත් වන බව නිසැක ය.

මෙම පොත පරිශීලනයෙන් ගණිත විෂයයේ ඇගයීම් ක්‍රියාවලිය සාර්ථක කර ගන්නා මෙන් ගුරුවරුන්ගෙන් ද, සිසුන්ගෙන් ද ඉල්ලා සිටිමි.

''**සංයුක්ත ගණිතය, ස්ථිතිකය - II**'' ඔබ අතට පත් කිරීම සඳහා අනුග්‍රහය දැක් වූ AusAid ව්‍යාපෘතියටත්, මෙම කාර්යය සාර්ථක කර ගැනීමට ශාස්ත්‍රීය දායකත්වය සැපයූ ගණිත දෙපාර්තමේන්තුවේ කාර්ය මණ්ඩලයට හා බාහිර විද්වතුන් සියලු දෙනාටත් මගේ ප්‍රණාමය හිමි වේ.

ආචාර්ය ටී. ඒ. ආර්. ජේ. ගුණසේකර
අධ්‍යක්ෂ ජනරාල්
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය

අධ්‍යක්ෂතුමාගේ පණිවිඩය

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විෂයධාරාවන් අතර ගණිතය විෂයධාරාව සඳහා සුවිශේෂී ස්ථානයක් හිමිව ඇත. අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (සාමාන්‍ය පෙළ) විභාගයෙන් උසස් ලෙස සමත්වන සිසුන් විශේෂයෙන් ගණිත විෂය ධාරාවට ප්‍රිය කරයි. රටකට සහ ලෝකයට ඔබින නවෝත්පාදක රාශියක් බිහි කිරීමට දායක වූ විශේෂඥයින් බිහි කර ඇත්තේ උසස් පෙළ ගණිත විෂයධාරාව හැදෑරූ සිසුන් බව අතීතය මැනවින් සාක්ෂි දරයි.

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) ගණිත විෂයයන් සඳහා විෂයමාලාව සකස් කර ඇත්තේ විද්‍යාත්මක ලෝකයට, තාක්ෂණ ලෝකයට සහ වැඩලෝකයට අත්‍යවශ්‍ය විද්වතුන් බිහි කර දීමේ පරම චේතනාව ඇතිවයි.

වර්ෂ 2017 සිට උසස් පෙළ සංයුක්ත ගණිත විෂය සහ උසස් පෙළ ගණිත විෂය සඳහා සංශෝධිත නව විෂයමාලාවක් ක්‍රියාත්මක වේ. මෙම විෂයමාලාව ඉගෙන ගන්නා ශිෂ්‍ය ශිෂ්‍යයාවන්ගේ ඉගෙනුම පහසුව සඳහා පුහුණු ප්‍රශ්න සහ උත්තර ඇතුළත් පොතක් ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනයේ ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව විසින් සකස් කර ඇත. මෙම පොතේ ඇතුළත් ප්‍රශ්න සිසුන්ගේ සංකල්ප සාධන මට්ටම මැන බැලීමටත් ඉදිරියේ දී පවත්වන අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය සඳහා පෙර සූදානමටත් සුදුසු වන පරිදි සකස් කර ඇත. ප්‍රශ්නයට අදාළ උත්තර සපයා දීමෙන් බලාපොරොත්තු වන්නේ ශිෂ්‍ය ශිෂ්‍යයාවන් ප්‍රශ්නයක් සඳහා උත්තරය ලබාදීමේ දී අනුගමනය කළ යුතු පියවර සහ ක්‍රමවේද පිළිබඳ ව අත්දැකීමක් ලබාදීම යි. එමගින් උත්තරය පෙළගැස්විය යුතු ආකාරය පිළිබඳ ව සිසුන්ට තම හැකියා, කුසලතා සහ දැනුම වැඩි දියුණු කර ගැනීමට හැකිවේ. මෙම ප්‍රශ්න සහ උත්තර සකස් කිරීමට විශේෂඥතාවයක් ඇති විශ්වවිද්‍යාල කථිකාචාර්යවරුන් ගුරුවරුන් සහ විෂයමාලා විශේෂඥයින්ගේ සම්පත් දායකත්වය ලබා දී ඇත. තවද මෙම ප්‍රශ්න සකස් කිරීමේ දී එක් එක් විෂය අන්තර්ගතයන් සඳහා විවිධ මාන ඔස්සේ ශිෂ්‍ය ශිෂ්‍යයාවන්ගේ අවධානය යොමු කිරීමටත්, සිසුන්ගේ දැනුම පුළුල් කර ගැනීමටත් අවස්ථාව ලබා දීමට හා මග පෙන්වීමට අවධානය යොමු කර ඇත. ගුරුවරුන්ගේ උපදෙස් සහ මග පෙන්වීම යටතේ මෙන් ම ස්වයංව ඉගෙනුම සඳහාත් උචිත ලෙස මෙම පොත සකස් කර ඇත.

මෙවැනි වටිනා පොතක් නිර්මාණය කිරීමට අවශ්‍ය උපදෙස් සහ මග පෙන්වීම ලබාදුන් ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනයේ අධ්‍යක්ෂ ජනරාල්තුමියට සහ සම්පත් දායකත්වය දැක් වූ සැමටත් ස්තුතියි. මෙම පොත භාවිත කර එමගින් ලබන අත්දැකීම් තුළින් නැවත මුද්‍රණයක දී භාවිතයට සුදුසු ධනාත්මක අදහස් අප වෙත ලබා දෙන ලෙස ගෞරවයෙන් ඉල්ලා සිටිමි.

කේ. රංජිත් පත්මසිරි
අධ්‍යක්ෂ
ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය

විෂයමාලා කමිටුව

අනුමැතිය	**:**	ශාස්ත්‍රීය කටයුතු මණ්ඩලය, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.
උපදේශකත්වය	**:**	ආචාර්ය ටී. ඒ. ආර්. ජේ. ගුණසේකර මිය අධ්‍යක්ෂ ජනරාල් ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
අධීක්ෂණය	**:**	කේ. රංජිත් පත්මසිරි මයා, අධ්‍යක්ෂ, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.
විෂය සම්බන්ධීකරණය :		එස්. රාජේන්ද්‍රම් මයා ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය. කේ. කේ. වජිමා එස්. කංකානම්ගේ මෙය සහකාර කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.

සම්පත් දායකත්වයඃ

ජී. පී. එච්. ජගත් කුමාර මයා	ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.
එම්. නිල්මිණී පී. පීරිස් මිය	ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
එස්. රාජේන්ද්‍රම් මයා	ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.
සී. සුදේශන් මයා	සහකාර කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.
පී. විජායිකුමාර් මයා	සහකාර කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.
කේ.කේ.වජිමා එස්. කංකානම්ගේ මෙය	සහකාර කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.

කතෘ මණ්ඩලය :

කේ. ගනේෂලිංගම් මයා	විශ්‍රාමික ප්‍රධාන ව්‍යාපෘති නිලධාරි ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
වී. රාජරත්නම් මයා	විශ්‍රාමික ගණිත ආචාර්ය

ටී. සිදම්බරනාදන් මයා	විශ්‍රාමික ගණිත ආචාර්ය
එන්. ආර්. සහබන්දු මයා	විශ්‍රාමික ගණිත ආචාර්ය
එච්. ඩී. සී. එස්. ප්‍රනාන්දු මයා	ගුරු සේවය, විවේකානන්ද විද්‍යාලය, කොළඹ 13
එස්. ජී. දොලුවීර මයා	ගුරු සේවය, වෙෂ්ලි විදුහල කොළඹ 09
භාෂා සංස්කරණය :	එස්. එන්. ගනේවත්ත සිංහල භාෂා උපදේශක
මුද්‍රණය හා අධීක්ෂණය :	ඩබ්. එම්. යූ. විජේසූරිය වැ.බ අධ්‍යක්ෂ (මුද්‍රණ හා ප්‍රකාශන) ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
පරිගණක වදන් සැකසීම :	මොනිකා විජේකෝන්, විවෘත පාසල ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය ඉරේෂා රංගනා දිසානායක මෙණවිය මුද්‍රණාලය ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
පිටකවරය :	ඉරේෂා රංගනා දිසානායක මෙණවිය මුද්‍රණාලය ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
විවිධ සහාය :	එස්. හෙට්ටිආරච්චි මයා ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව කේ. එන්. සේනානි මිය ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව ආර්. එම්. රූපසිංහ මයා ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව

පෙරවදන

අධ්‍යාපන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) ශ්‍රේණිවල සංයුක්ත ගණිතය ඉගෙනුම ලබන සිසුන් පුහුණු වීම සඳහා මෙම පොත සකස් කර ඇත. සිසුන්ට ප්‍රමාණවත් අභ්‍යාස ලබා දීම සඳහාත්, විෂය ධාරාව හැදෑරූ පසු විභාගයට සූදානම් කිරීම පිණිස අභ්‍යාස කරවීමේ අරමුණෙන් මෙම පොත සකස් කර ඇත. මෙය ආදර්ශ ප්‍රශ්න පත්‍ර කට්ටලයක් නොවන බවත් අභ්‍යාස ප්‍රශ්නවල එකතුවක් බවත් සිසුන් ගුරුවරුන් වටහා ගත යුතුයි.

මෙම අභ්‍යාස ප්‍රශ්න කට්ටලයේ අභ්‍යාස කළ පසු දී ඇති පිළිතුරු සමග තමන්ගේ පිළිතුරු සසඳා බැලිය හැකි ය. මෙහි දී ඇති ආකාරයේ ම සියලුම පියවර සිසුන්ගේ පිළිතුරුවල තිබීම අත්‍යවශ්‍ය නොවේ. ඔබේ පිළිතුරුවල නිවැරදිතාවය බැලීමටත් පියවර නිවැරදිව අනුගමනය කිරීමට මග පෙන්වීමක් ලෙස මෙහි පිළිතුරු දී ඇති බව වටහා ගන්න.

මෙම අභ්‍යාස ප්‍රශ්න කට්ටලය වර්ෂ 2017 සිට ක්‍රියාත්මක වන සංශෝධිත විෂය මාලාවට අනුව 2019 අවුරුද්දේ ප්‍රථම වරට අ.පො.ස (උ.පෙළ) විභාගයට පෙනී සිටින සිසුන් ඉලක්ක කරගෙන සකස් කර ඇත. නමුත් සංයුක්ත ගණිතය, උසස් ගණිතය, ගණිතය වැනි විෂයන් හදාරන තමන්ගේ විෂයධාරාවට අනුව ප්‍රශ්න කට්ටලය භාවිත කළ හැකි ය.

ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනයේ ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව විසින් එළි දක්වන අ.පො.ස (උ.පෙළ) සඳහා වූ ප්‍රථම අභ්‍යාස ප්‍රශ්න කට්ටලයට අමතරව ස්ථිතිකය - I ස්ථිතිකය - II, සංයුක්ත ගණිතය I, සංයුක්ත ගණිතය II සඳහා ඒකක අනුව සකස් කළ අභ්‍යාස ප්‍රශ්න කට්ටල ඉක්මනින් එළි දැක්වීමට නියමිතය.

මෙම පොතෙහි ඇති අඩුපාඩු සම්බන්ධව අදහස් අප වෙත යොමු කරන්නේ නම් නැවත මුද්‍රණයේ දී සකස් කිරීමට හැකි වේ. ඔබේ අදහස් අප මහත් අගය කොට සලකන බවත් මෙයින් දන්වා සිටිමි.

එස්. රාජේන්ද්‍රම්
ව්‍යාපෘති නායක
12 - 13 ශ්‍රේණි ගණිතය

පටුන

5.0 සන්ධිකළ දඬු

පෙර 4.1 හා 4.2 පරිච්ඡේදවලදී තනි දෘඪ වස්තු මත ඒකතල බල පද්ධති ක්‍රියා කරන ආකාරය අධ්‍යයනය කරන ලදී. මෙම පරිච්ඡේදයේ දී දෘඪ වස්තු දෙකක් හෝ කීපයක් මත ඒක තල බල පද්ධති ක්‍රියා කරන ආකාරය අධ්‍යයනය කරනු ලැබේ.

මෙහිදී එම දඬුවල බර යටතේ එම දඬු සමතුලිතව පවතින ආකාරය හා බාහිර බලයක් යෙදූ විට අසව්වලදී ඇතිවන ප්‍රතික්‍රියා ද සොයා බලනු ලැබේ.

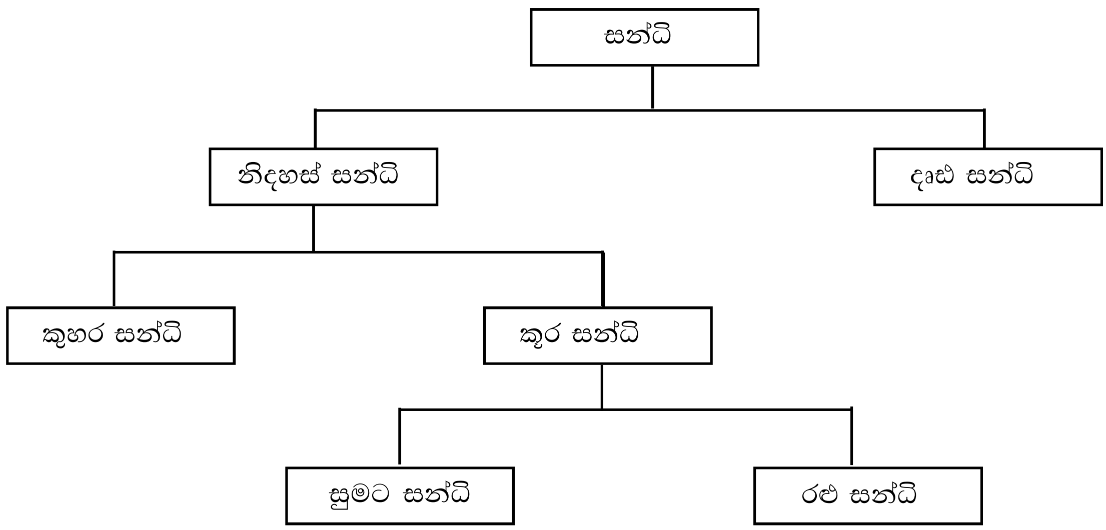
5.1 සරල සන්ධි වර්ග

(i) දෘඪ සන්ධිය

දඬු දෙකක් සන්ධි කර ඇති විට එම දඬු දෙක වෙන් කිරීමට හෝ එම සන්ධි හරහා එකකට සාපේක්ෂව අනෙක් දණ්ඩ චලනය කිරීමට නොහැකි නම්, එම දඬු දෙක දෘඪ ලෙස සම්බන්ධ කර ඇතැයි කියනු ලැබේ.

(ii) කුර සන්ධිය

දඬු දෙකක් සැහැල්ලු සුමට ඇණයක් මගින් සම්බන්ධ කර ඇතිවිට දඬුවලට සන්ධිය වටා කැරකිය හැකි නම් එම සන්ධිය සුචල සන්ධියක් ලෙසත් කැරකීමට නොහැකි නම් රළු සන්ධියක් ලෙසත් හඳුන්වයි. මෙම පාඩමේ දී සුමට සුචල සන්ධි පිළිබඳ හදාරනු ලැබේ.

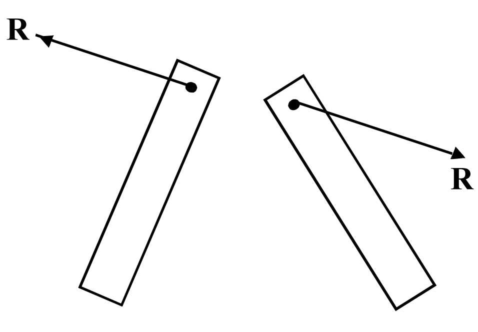


5.2 දෘඪ සන්ධි

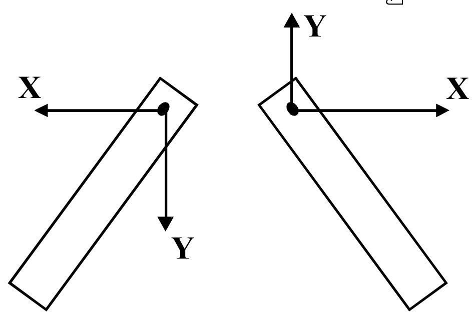
දඬු රැසක් හෝ කීපයක් සම්බන්ධ කර ඇති වස්තුවක හැඩය බාහිර බල මගින් වෙනස් කළ නොහැකි නම් එම සම්බන්ධ කර ඇති සන්ධි දෘඪ සන්ධි වේ.

සන්ධියේ දී ක්‍රියා කරන ප්‍රතික්‍රියා හඳුනා ගැනීම සඳහා අඬු ඈත් කර දක්වා ඇත. මෙම සන්ධියේ ක්‍රියා කරන ප්‍රතික්‍රියා විශාලත්වයෙන් සමාන, දිශාවෙන් විරුද්ධ විය යුතුය.

R බලය සෙවීම සඳහා R බලයේ සංරචක වලට වෙන් කරන ආකාරය පහත දැක්වේ.



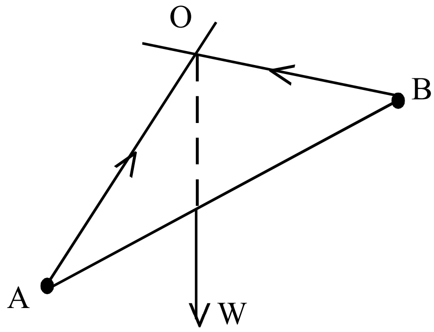
මෙහි X හා Y යනු R බලයේ පිළිවෙලින් තිරස් හා සිරස් සංරචක වේ. එමෙන්ම R යනු X හා Y වල සම්ප්‍රයුක්තය වන අතර එය සන්ධිය හරහා ගමන් කරයි.



මෙහිදී කුඩා බර නැති සුමට ඇණයක් දඬු හරහා විදීමෙන් එම දඬු දෙක සන්ධි කරනු ලැබේ. එම කුඩා ඇණය සුමට වන විට දඬුදෙක සම්බන්ධවන සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව එම ඇණයට ලම්බ වේ. එම බල දෙක යටතේ එම ඇණය සමතුලිතව ඇත්නම්, එම බල විශාලත්වයෙන් සමානව දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධව එකම ක්‍රියා රේඛාවේ ක්‍රියා කරයි. එනම් එක් එක් දණ්ඩ මත ක්‍රියා කරන ප්‍රතික්‍රියා විශාලත්වයෙන් සමාන දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධව එකම ක්‍රියා රේඛවේ ගමන් කරන පරිදි එම සන්ධියේ ක්‍රියා කරයි. පහසුව සඳහා අවශ්‍යතාවය පරිදි සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව එකිනෙක ලම්බ සංරචක දෙකකට විභේදනය කරයි.

සටහන ඃ

බර දණ්ඩක්, එහි දෙකෙලවර වෙනත් දඬු මගින් සන්ධි කර ඇති විට එම සන්ධිවලදී ක්‍රියා කරන ප්‍රතික්‍රියා දණ්ඩ ඔස්සේ ක්‍රියා නොකරයි. මෙහිදී එම දණ්ඩ අසමාන්තර බල තුනක් යටතේ සමතුලිතව පවතී.



සමතුලිත තාවය සඳහා එම බල O ලක්ෂයේ දී හමුවිය යුතුය.

නමුත් දණ්ඩ සැහැල්ලු දණ්ඩක් නම් එම දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියා දෙකක් ක්‍රියා කරන අතර ඒවා එකිනෙක තුලනය කිරීම සඳහා දණ්ඩ ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි.
මෙහි සලකන රාමුව අක්ෂයක් වටා සමමිතික නම් එම අක්ෂයෙන් දෙපැත්තේ එකම බල ක්‍රියාකරයි.

ගැටළු විසඳීම සඳහා උපදෙස්

(i) ජ්‍යාමිතික දත්ත අනුව නිවැරදි රූප සටහන් අඳින්න.
(ii) බල නිවැරදි ව ලකුණු කරන්න.
(iii) නොදන්නා බල සෙවීම සඳහා අවශ්‍ය සමීකරණ ලබා ගන්න.
(iii) එක් එක් සන්ධියේ දී ක්‍රියා කරන බල සෙවීම සඳහා එම සන්ධියේ ක්‍රියා කරන ප්‍රතික්‍රියා එකිනෙකට ලම්බ සංරචක දෙකකට වෙන්කර ලකුණු කරන්න.

සටහන ඃ

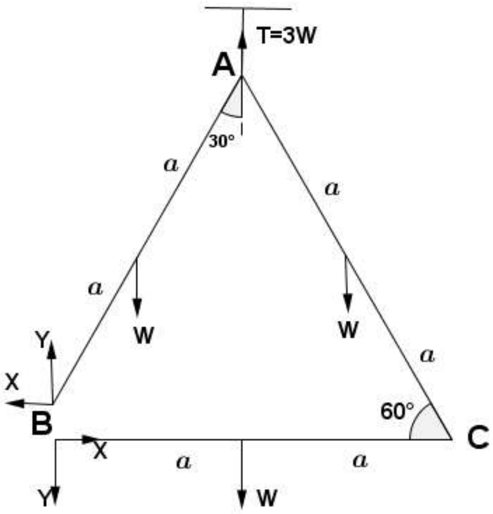
රාමුව දෘඪ එකක් වීමට සන්ධි n වලින් යුත් දෘඪ රාමුවක් සෑදීම සඳහා දඬු *(2n-3)* ගණනක් අවශ්‍ය වේ.

එම රාමුවට දඬු *(2n-3)* වැඩිවූ විට එය වඩා ශක්තිමත් වේ.

5.3 විසඳූ නිදසුන්

උදාහරණ 1

දිග $2a$ සහ W බර වන ඒකාකාර දඬු තුනක් නිදහස් ලෙස සුමටව අග නිදහස් කෙළවර වලින් එකිනෙක සම්බන්ධ කර ABC රාමුවක් සාදා A ලක්ෂයෙන් එල්වා ඇත. AB දණ්ඩේ B කෙළවරේ දී ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය සොයන්න.



BC දණ්ඩේ සමතුලිත තාවය සලකමු.
BC දණ්ඩ සඳහා C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$\text{Cm} \quad W \,.\, a + \mathrm{Y} \,.\, 2a = 0$$

$$2\mathrm{Y} + \mathrm{W} = 0 \qquad ; \mathrm{Y} = -\frac{W}{2}$$

AB දණ්ඩේ සමතුලිත තාවය සලකමු.
AB දණ්ඩ සඳහා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$\text{AO} \quad \mathrm{Y}(2a \sin 30°) + \mathrm{X}\,(2a \cos 30°) - W(a \sin 30°) = 0$$

$$2\mathrm{Y} + 2\mathrm{X}\,\cot 30° = W$$

$$2\mathrm{Y} + 2\sqrt{3}\mathrm{X} = W$$

$$-W + 2\sqrt{3}\mathrm{X} = W \qquad ; \mathrm{X} = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

$$\mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2} = \sqrt{\frac{W^2}{3} + \frac{W^2}{4}} = \sqrt{\frac{7}{12}}W$$

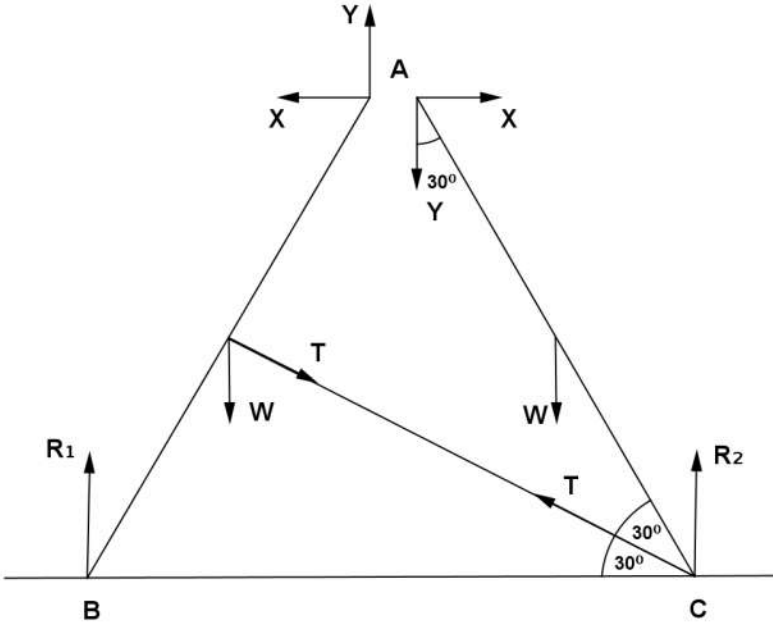
$$\tan\theta = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \qquad \therefore \; \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

B වලදී ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\sqrt{\frac{7}{12}}$ W ; R ප්‍රතික්‍රියාව CB සමග සාදන කෝණය θ නම්,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

උදාහරණය 2

දිග $2a$ සහ W බර වන ඒකාකාර AB, AC දඬු දෙකක් A ලක්ෂ්‍යයේ දී සුමට ලෙස සන්ධිකර දඬු දෙක සිරස් තලයක සමතුලිත තාවයේ තබා ඇත්තේ B හා C දෙකෙළවර සුමට තිරස් තලයක් මත ගැටෙන පරිදි ය. AB දණ්ඩේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ හා C කෙළවර සැහැල්ලු අවිතනය තන්තුවක් මගින් සම්බන්ධ කර ඇත. $B\hat{A}C = 60°$. තන්තුවේ ආතතිය ද A ලක්ෂ්‍යයේ ප්‍රතික්‍රියාව ද සොයන්න.



$AB = AC$; $B\hat{A}C = 60°$

එනම් ABC මගින් සමපාද ත්‍රිකෝණයක් සාදයි.

AB හා AC දඬු වල සමතුලිත තාවය සඳහා බල

සිරස්ව විභේදනයෙන් ,

$\uparrow \; R_1 + R_2 - 2W = 0$; $R_1 + R_2 = 2W$ .... ①

C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන් ,

Cm $\quad -R_1 \,.\, 4a\cos 60° + W \,.\, a\cos 60° + W \,.\, 3a\cos 60° = 0$ .... ②

$R_1 = W$ and $R_2 = W$

AC දණ්ඩේ සමතුලිත තාවය සඳහා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

Am $\quad -W.a\cos 60° - T\,.\,a + R_2\,.\,2a\cos 60° = 0$ .... ③

$$-\frac{W}{2} - T + W = 0; \quad T = \frac{W}{2}$$

AC දණ්ඩේ සමතුලිත තාවය සඳහා බල

තිරස්ව විභේදනයෙන් ,

$$\rightarrow X - T\cos 30° = 0 \; ; \; X = T\cos 30° = \frac{\sqrt{3}W}{4}$$

සිරස්ව විභේදනයෙන් ,

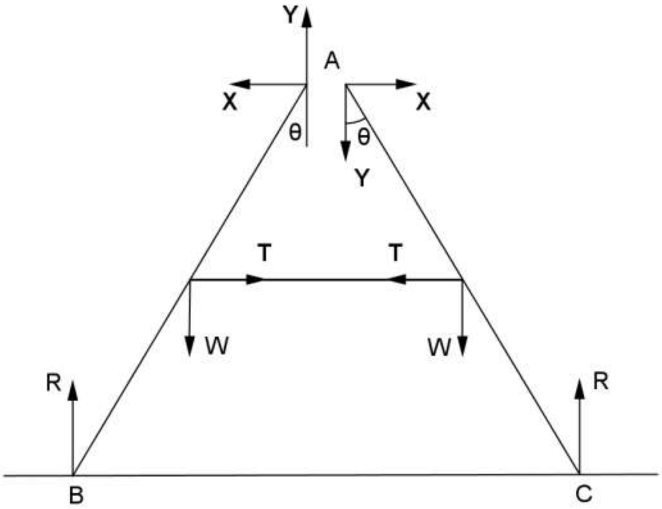
$$\uparrow R_2 - Y - W + T\sin 30° = 0$$

$$Y = R_2 - W + \frac{T}{2} = \frac{W}{4}$$

A හිදී ප්‍රතික්‍රියාව $\sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{\frac{3W^2}{16} + \frac{W^2}{16}} = \frac{W}{2}$

උදාහරණය 3

බර W වන ඒකාකාර AB, AC දඬු දෙකක් A හි දී සුමටව සන්ධි කර B හා C දෙකෙළවර සුමට තලයක් මත සමතුලිතව ඇත්තේ ABC තලය සිරස් වන පරිදිය. රාමුව සමතුලිතව තබා ඇත්තේ AB හා AC වල මධ්‍යලක්ෂ්‍ය යා කරන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගිනි. $B\hat{A}C = 2\theta$ නම් තන්තුවේ ආතතිය ද AB දණ්ඩ මත A ලක්ෂ්‍යයේ දී ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය ද සොයන්න.



AB = AC = 2a නම්,

AB හා AC වල, සමතුලිත තාවය සඳහා බල සිරස්ව විභේදනයෙන්,

$\uparrow 2R - 2W = 0$

$R = W$ .... ①

AB දණ්ඩේ සමතුලිත තාවය සඳහා බල සිරස්ව විභේදනයෙන්,

$\uparrow R + Y - W = 0$

$W + Y - W = 0 \; ; \; Y = 0$ .... ②

සිරස්ව විභේදනයෙන්,

$\rightarrow T - X = 0 \; ; \; T = X$ .... ③

AB දණ්ඩේ සමතුලිත තාවය සඳහා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්.

A↺ $\quad T . a\cos\theta + W . a\sin\theta - R . 2a\sin\theta = 0$

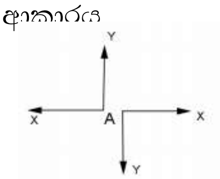
$$T = \frac{(2W - W)\sin\theta}{\cos\theta} = W\tan\theta \text{ .... ④}$$

A හිදී ප්‍රතික්‍රියාව $\quad W\tan\theta$

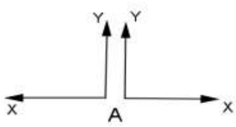
සටහන

ඉහත උදාහරණයේ පද්ධතිය A හරහා යන සිරස් අක්ෂයක් වටා සමමිතික වේ.

A හිදී ප්‍රතික්‍රියා ලකුණු කර ඇති ආකාරය



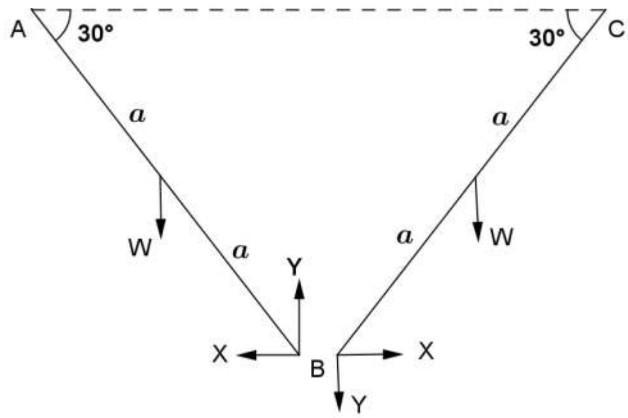
පද්ධතිය A හරහා යන සිරස් අක්ෂයක් වටා සමමිතික නම් බල පහත පරිදි ලකුණු විය යුතුය.



එම නිසා $Y = 0$

උදාහරණ 4

දිග $2a$ සහ W බර වන ඒකාකාර AB, BC දඬු දෙකක් B ලක්ෂයේ සුමට ලෙස සන්ධිකර රාමුව A හා C දෙකෙළවරින් එකම තිරස් රේඛාවේ පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකකට සම්බන්ධ කර සිරස් තලයේ සමතුලිතව ඇති විට එක් එක් දණ්ඩ තිරස සමග 30^0 කෝණයක් සාදයි නම් B සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.



මෙම පද්ධතිය B හරහා යන සිරස් අක්ෂයක් වට සමමිතික වේ.
එනම් B ලක්ෂයේ දී ක්‍රියා කරන සිරස් සංරචකය වන Y හි අගය බිංදුව වේ.
AB දණ්ඩේ සමතුලිත තාවය සඳහා A වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්,

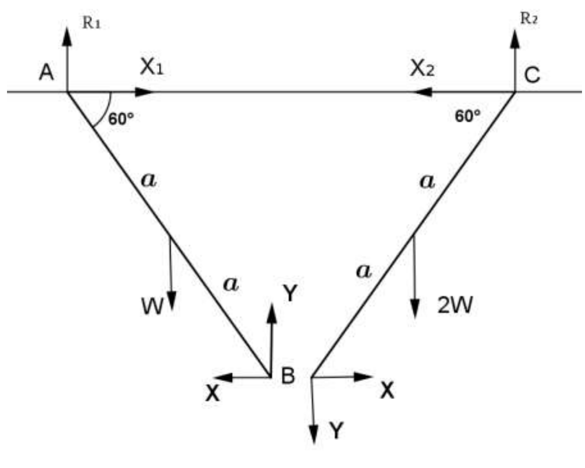
A↻ $-X.2a\sin 30^0 + Y.2a\cos 30^0 - Wa\cos 30$

$$-X.2a\sin 30° = W.a\cos 30°$$

$$X = -\frac{\sqrt{3}W}{2}$$

උදාහරණ 4

දිග 2a වන AB, BC දඬු දෙකක බර පිළිවෙළින් W හා $2W$ වේ. එම දඬු B හිදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ABC රාමුව සිරස් තලයක A හා C තිරස් රේඛාවක පිහිටන පරිදි එල්වා ඇත. එක් එක් දණ්ඩ තිරස සමග 60° ක කෝණයක් සාදයි. AB දණ්ඩ මත B ලක්‍ෂයේ දී ප්‍රතික්‍රියාව ද දිශාව ද සොයන්න.



පද්ධතියේ සමතුලිතතාවය සඳහා බල

තිරස්ව විභේදනයෙන්,

$$\rightarrow X_1 - X_2 = 0\ ;\ X_1 = X_2$$

සිරස්ව විභේදනයෙන්,

$$\uparrow R_1 + R_2 - 3W = 0\ ;\ R_1 + R_2 = 3W$$

AB හා BC දඬු සඳහා A වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

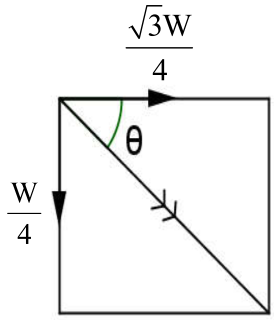
A↻ $R_2.2a - W.\frac{a}{2} - 2W.\frac{3a}{2} = 0$

$$2R_2 = \frac{7W}{2}\ ;\ R_2 = \frac{7W}{4} \text{ හා } R_1 = \frac{5W}{4} \text{ ද}$$

BC දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා බල

සිරස්ව විභේදනයෙන්, $\uparrow R_2 - 2W - Y = 0\ ;\ Y = R_2 - 2W = \frac{7W}{4} - 2W = -\frac{W}{4}$

BC දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්



$$C \circlearrowleft \quad X \,.\, 2a \sin 60° + Y \,.\, 2a \cos 60° + 2W \,.\, a \cos 60° = 0$$

$$X.\, 2a \sin 60° \; - \; \frac{W}{4}.\, 2a \cos 60° + 2W.\, a \cos 60° = 0$$

$$X \; = - \; \frac{\sqrt{3}W}{4}$$

$$R = \sqrt{\frac{3W^2}{16} + \frac{W^2}{16}}$$

$$R = \frac{W}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{W}{4}}{\frac{\sqrt{3}W}{4}} \; = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

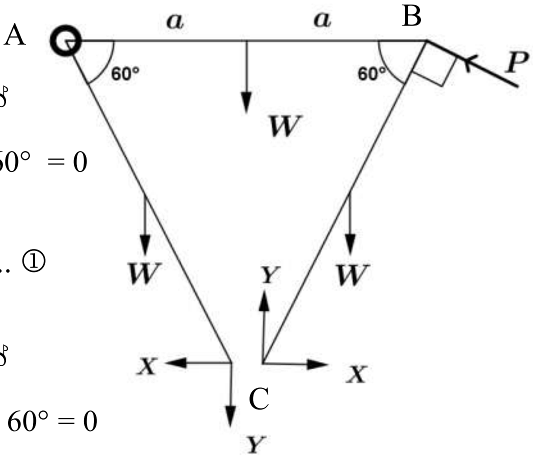
උදාහරණය 6

බර W හා දිග $2a$ වන ඒකාකාර AB, BC, CA දඬු තුනකි. ඒවායේ අග කෙළවර දී එකිනෙකට සුමටව සන්ධි කර එම සමපාද ත්‍රිකෝණාකාර රාමුවක් සාදා ඇත. මෙම රාමුව A හි දී සුමටව අසම කර ඇති අතර AB තිරස්ව හා AB ට පහළින් C පිහිටන පරිදි සිරස්තලයක සමතුලිතව තැබීම සඳහා B හි දී BC ලම්බකව P බලයක් යොදා ඇත. P හි අගය සොයන්න. තවද C හි දී BC දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය සොයන්න.

පද්ධතිය සඳහා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$A \circlearrowleft \quad - W \,.a \cos 60° - W.a - W \;(2a - a \cos 60°) + P.\, 2a \cos 60° = 0$$

$$P = 3W$$



AC දණ්ඩේ සමතුලිතභාවය සඳහා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$A \circlearrowleft \quad X.\, 2a \sin 60° + Y.\, 2a \cos 60° + W.\, a \cos 60° \; = 0$$

$$\Rightarrow \; X + \frac{Y}{\sqrt{3}} \; = -\frac{W}{2\sqrt{3}} \;............................ \text{①}$$

BC දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$B \circlearrowleft \quad X \,.\, 2a \sin 60° - Y \,.\, 2a \cos 60° + W \,.\, a \cos 60° = 0$$

$$\Rightarrow \; X - \frac{Y}{\sqrt{3}} \; = -\frac{W}{2\sqrt{3}} \;.............................. \text{②}$$

① හා ②න්

$$Y = 0$$

$$X = -\frac{W}{2\sqrt{3}}$$

C හිදී ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{W}{2\sqrt{3}}$

උදාහරණය 7

දිග $2a$ වන AB සහ BC වන ඒකාකාර දඬු දෙකක බර පිළිවෙළින් 2W හා W වේ. ඒවා B හිදී සුමට සන්ධිකර දඬු වල මධ්‍ය ලක්ෂ සැහැල්ලු අප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක් මගින් සම්බන්ධ කර ඇත. පද්ධතිය සිරස් තලයක A හා C දෙකෙළවර තිරස් සුමට තලයක ගැටෙමින් සමතුලිතව ඇත්තේ $A\hat{B}C = 2\theta$ වන පරිදිය. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{3W}{2}\tan\theta$ බව පෙන්වන්න. B හිදී ප්‍රතික්‍රියාවෙහි විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

පද්ධතියේ සමතුලිතතාවය සඳහා

C වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$C\curvearrowleft \quad W.\, a\sin\theta + 2W.\, 3a\sin\theta - R.\, 4a\sin\theta = 0$$

$$R = \frac{7W}{4}$$

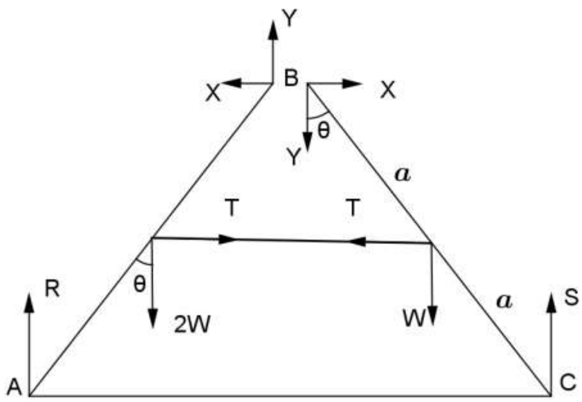
AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා B වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$B\curvearrowleft \quad T.\, a\cos\theta + 2W.\, a\sin\theta - R.\, 2a\sin\theta = 0$$

$$T = -2W\tan\theta + 2R.\tan\theta$$

$$T = -2W\tan\theta + \frac{7W}{2}\tan\theta$$

$$T = \frac{3W}{2}\tan\theta$$



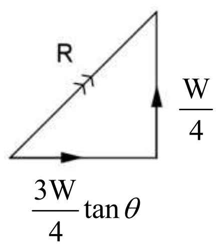
AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා බල

තිරස්ව විභේදනයෙන්

$$\rightarrow \; T - X = 0\,;\; X = T = \frac{3W}{2}\tan\theta$$

සිරස්ව විභේදනයෙන්

$$\uparrow \; Y + R - 2W = 0$$



$$Y = 2W - \frac{7W}{4} = \frac{W}{4}$$

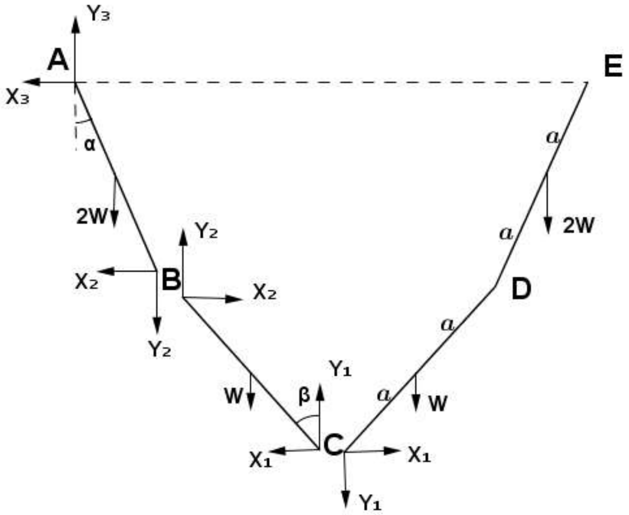
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9W^2}{4}\tan^2\theta + \frac{W^2}{16}}$$

$$= \frac{W}{4}\sqrt{1 + 36\tan^2\theta}$$

උදාහරණය 8

දිග $2a$ වන ඒකාකාර AB, BC, CD හා DE දඬු හතරක් පිළිවෙළින් B, C හා D හිදී සුමටව සන්ධිකර ඇත. AB, DE හි බර $2W$ ද BC, CD බර W ද වේ. පද්ධතිය එකම තිරස් රේඛාවේ පිහිටි A හා E මගින් එල්වා ඇත. AB හා BC සිරස සමග α, β කෝණ සාදයි. C සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව තිරස් බව පෙන්වා එහි විශාලත්වය $\frac{W}{2}\tan\beta$. බව පෙන්වන්න. තවද $\tan\beta = 4\tan\alpha$ බව පෙන්වන්න.



පද්ධතිය C හරහා යන සිරස් අක්ෂයක් වටා සමමිතික වේ.

t neúk aC හි ප්‍රතික්‍රියාවේ සිරස් සංරචකය බිංදුව වේ. $Y_1 = 0$

BC හි සමතුලිතතාවය සඳහා

බල තිරස්ව විභේදනයෙන්

$$\rightarrow X_1 - X_2 = 0$$

$$X_1 = X_2$$

බල සිරස්ව විභේදනයෙන්

$$\uparrow Y_1 + Y_2 - W = 0$$

$$Y_2 = W$$

B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

Bm $\quad -X_1 \,.\, 2a\cos\beta - W \,.\, a\sin\beta = 0$

$$X_1 = -\frac{W}{2}\tan\beta$$

AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

Am $\quad -X_2 \,.\, 2a\cos\alpha + 2W \,.\, a\sin\alpha + Y_2 .\ 2a\sin\alpha = 0$

$$X_2 = -2W\tan\alpha$$

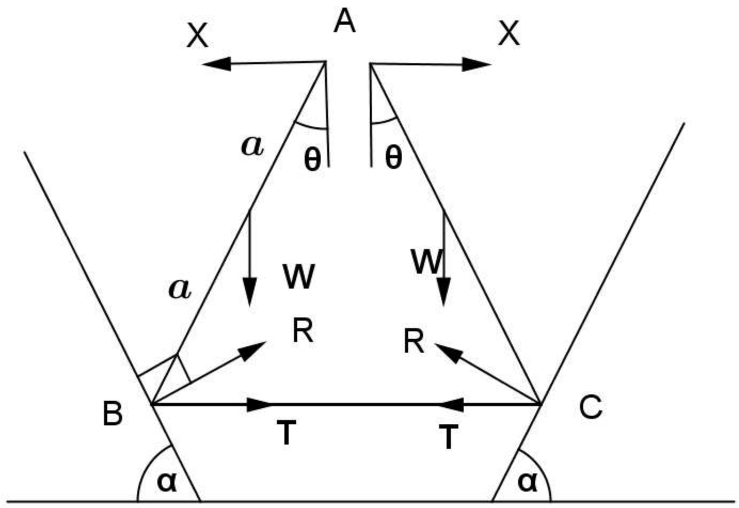
$$X_1 = X_2$$

$$\frac{W}{2}\tan\beta = 2W\tan\alpha$$

$$\tan\beta = 4\tan\alpha$$

උදාහරණය 9

බර W වන ඒකකාර දඬු දෙකක් වන AB හා AC, Aහිදී සුමට ලෙස සන්ධිකර B හා C සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තත්තුවක් මගින් එකිනෙක සම්බන්ධකර ඇත. B හා C දෙකෙළවර තිරසට α කෝණයක් ආනතව වන සුමට ආනත තල දෙකක් මතය. BC තිරස් වන අතර A සන්ධිය BCට ඉහළින් පිහිටයි. B කෙළවර මත ආනත තලය මගින් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. $\tan\theta > 2\tan\alpha$, නම් හා $B\hat{A}C = 2\theta$ තන්තුවේ ආතතිය $\frac{1}{2}W\left(\tan\theta - 2\tan\alpha\right)$ බව පෙන්වන්න. තවද A සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.



දණ්ඩක දිග $2a$ නම්

පද්ධතිය A හරහා යන සිරස් අක්ෂයක් වටා සමමිතික වේ.

එම නිසා A හිදී ප්‍රතික්‍රියාවේ සිරස් සංරචකය ශුන්‍ය වේ.

පද්ධතිය සමතුලිතතාවය සඳහා බල

සිරස්ව විභේදනයෙන්

$$\uparrow \; 2R\cos\alpha - 2W = 0 \; ; \; R = W\cos\alpha$$

AB දණ්ඩේ සමතුලිතභාවය සඳහා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$A\circlearrowleft \quad T.\,2a\cos\theta + R\sin\alpha\,.\,2a\cos\theta + W\,.\,a\sin\theta - R\cos\alpha\,.\,2a\sin\theta = 0$$

$$T = \frac{W}{2}\left(\tan\theta - 2\tan\alpha\right)$$

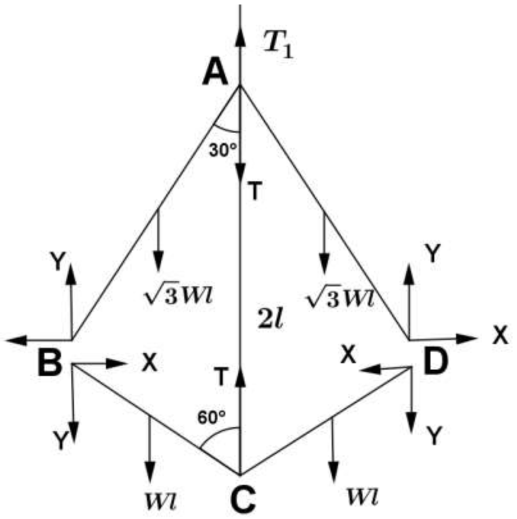
AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$B\circlearrowleft \quad X\,.\,2a\cos\theta - W\,.\,a\sin\theta = 0$$

$$X = \frac{W}{2}\tan\theta$$

උදාහරණය 10

AB, BC, CD හා AD යනු ඒකාකාර දඬු හතරක් වන අතර $AB = AD = \sqrt{3}\ell$ සහ $BC = DC = \ell$ වේ. එම දඬු A,B,C හා D හි දී සුමට ලෙස සන්ධිකර ABCD රාමුව සකසා ඇත. එක් එක් දණ්ඩේ ඒකක දිගක බර w වේ. A හා C දෙකෙළවර දිග 2ℓ වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් සම්බන්ධකර ඇත. රාමුව A. ලක්ෂයෙන් සිරස් තලයක එල්වා ඇත. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{W\ell}{4}\left(\sqrt{3}+5\right)$ බව පෙන්වන්න.



ක්‍රමය 1

$$AB^2 + BC^2 = 3\ell^2 + \ell^2 = 4\ell^2 = AC^2$$

එම නිසා, $A\hat{B}C = 90°$, $B\hat{A}C = 30°$, $B\hat{C}A = 60°$

පද්ධතිය AC වටා සමමිතික වේ. එම නිසා B හා D වලදී ප්‍රතික්‍රියා සමාන වේ.

AB, දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

Am $$X.\ \sqrt{3}\ell\cos 30° + Y.\ \sqrt{3}\ell\sin 30° - \sqrt{3}\ell W.\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\sin 30° = 0$$

$$X.\cot 30° + Y = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell W$$

$$\sqrt{3}X + Y = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell W \text{ ....} ①$$

BC දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

Cm $$Y.\ \ell\sin 60° + W\ell.\frac{\ell}{2}\sin 60° - X.\ \ell\cos 60° = 0$$

$$Y + \frac{W\ell}{2} = \frac{X}{\sqrt{3}}$$

$$X = \sqrt{3}Y + \frac{\sqrt{3}W\ell}{2} \text{ ....} ②$$

① හා ②න්

$$Y + \sqrt{3}X = \frac{\sqrt{3}W\ell}{2}$$

$$Y + \sqrt{3}\left(\sqrt{3}Y + \frac{\sqrt{3}W\ell}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}W\ell}{2}$$

$$4Y + \frac{3W\ell}{2} = \frac{\sqrt{3}W\ell}{2}$$

$$Y = \frac{W\ell}{8}\left(\sqrt{3}-3\right)$$

BC හා CD දඬුවල සමතුලිතතාවය සඳහා

$$\uparrow \; T - 2Y - 2W\ell = 0$$

$$T = 2Y + 2W\ell$$

$$T = 2\frac{W\ell}{8}\left(\sqrt{3}-3\right) + 2W\ell$$

$$T = \frac{W\ell}{4}\left(\sqrt{3}+5\right)$$

හෝ BC හා CD සඳහා D වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

ක්‍රමය 2

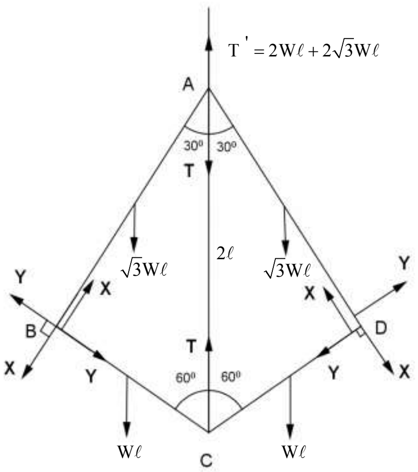
$$AB^2 + BC^2 = 3\ell^2 + \ell^2 = 4\ell^2 = AC^2$$

$$A\hat{B}C = 90^0 \;,\; B\hat{A}C = 30^0 \;,\; B\hat{C}A = 60^0$$

සමමිතිය අනුව B හා D වලදී ප්‍රතික්‍රියා සමාන වේ.

B සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාවේ සංරචක BA හා BC ඔස්සේ ගැනීමෙන් $A\hat{B}C = 90^0$

AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා A වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්



Am $\quad \sqrt{3}W\ell.\,\dfrac{\sqrt{3}\ell}{2}\sin 30° - Y.\sqrt{3}\ell = 0$

$$Y = \frac{\sqrt{3}W\ell}{4}$$

BC දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා C වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

Cm $\quad W\ell.\,\dfrac{\ell}{2}\sin 60 - X.\ell = 0$

$$X = \frac{\sqrt{3}W\ell}{4}$$

BC හා CD සමතුලිතතාවය සඳහා බල සිරස්ව විභේදනයෙන්

$$T - 2W\ell + 2X\cos 30° - 2Y\cos 60° = 0$$

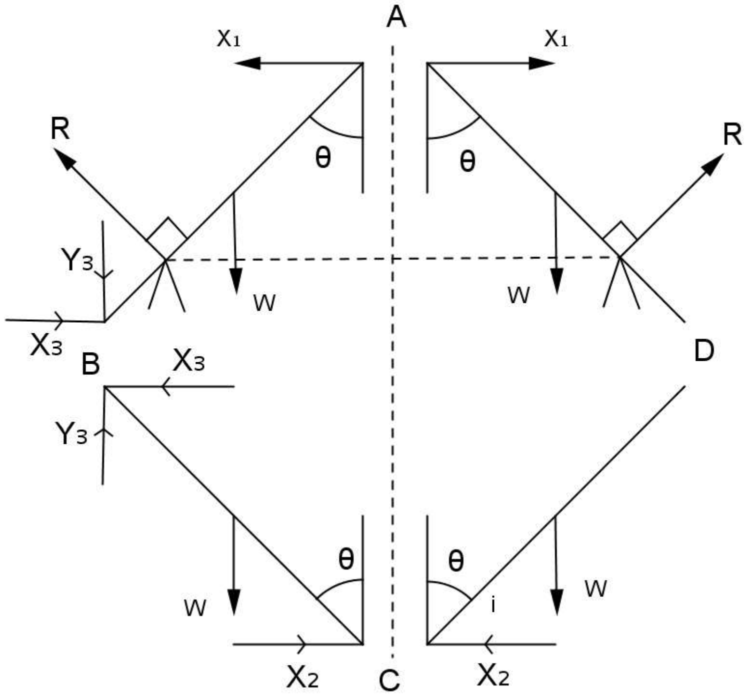
$$T = 2W\ell + 2Y\cos 60° - 2X\cos 30°$$

$$= 2W\ell + \frac{\sqrt{3}W\ell}{4} - \sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}W\ell}{4}$$

$$= \frac{W\ell}{4}\left(\sqrt{3}+5\right)$$

උදාහරණය 11

බර W හා දිග $2a$ වන ඒකාකාර AB, BC, CD හා DA දඬු හතරක් කෙළවරින් සුමටව සන්ධිකර ඉහළ ඇති AB, AD දඬු එකිනෙකට $2c$ දුරකින් පිහිටි සුමට නා දැති දෙකක් මත ගැටෙමින් සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ පවතී. දඬු සිරස සමග සාධන කෝණය θ නම් B සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් හා සිරස් සංරචක සොයන්න. තවද $c = 2a\sin^3\theta$ බව පෙන්වන්න.



පද්ධතිය ACවටා සමමිතික වේ. එනම් A හාC සන්ධිවලදී ප්‍රතික්‍රියාවේ සිරස සංරචක ශුන්‍ය වේ.

පද්ධතිය සමතුලිතතාවය සඳහා බල

සිරස්ව විභේදනයෙන්

$$\uparrow 2\mathrm{R}\sin\theta - 4W = 0$$

$$\mathrm{R} = \frac{2W}{\sin\theta} \text{ .... ①}$$

BC දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\mathrm{B}\curvearrowleft \quad \mathrm{X}_2 .\, 2a\cos\theta - W.a\sin\theta = 0$$

$$\mathrm{X}_2 = \frac{W\tan\theta}{2} \text{ .... ②}$$

බල තිරස්ව විභේදනයෙන්

$$\rightarrow \mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_3 = 0;\ \ \mathrm{X}_3 = \mathrm{X}_2 = \frac{W\tan\theta}{2} \text{ ......③}$$

බල සිරස්ව විභේදනයෙන්

$$\uparrow \mathrm{Y}_3 - \mathrm{W} = 0\ ;\ \ \mathrm{Y}_3 = \mathrm{W} \text{ ....④}$$

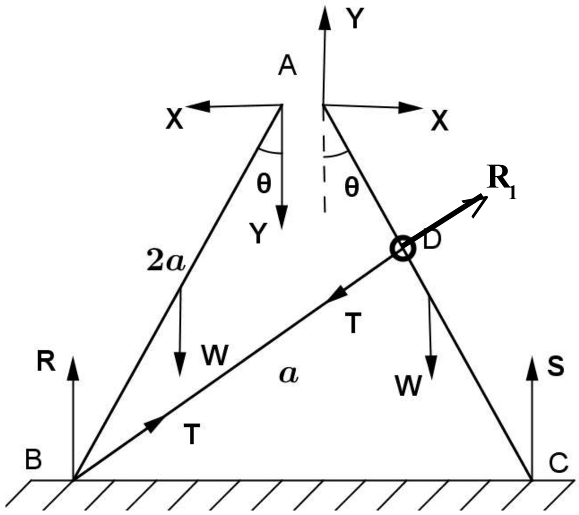
AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

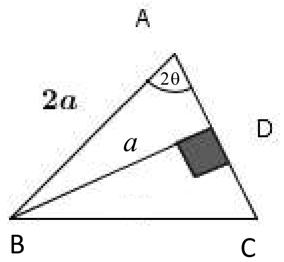
$$\mathrm{A}\curvearrowleft \quad -\mathrm{R}.\frac{\mathrm{c}}{\sin\theta} + Wa.\sin\theta + \mathrm{Y}_3.2a\sin\theta + \mathrm{X}_3.2a\cos\theta = 0$$

$$-\frac{2W.\mathrm{c}}{\sin^2\theta} + \mathrm{W}.a\sin\theta + W.2a\sin\theta + \frac{W}{2}.2a\sin\theta = 0\ ; \qquad c = 2a\sin^3\theta$$

උදාහරණය 12

බර W හා $2a$ වන ඒකාකාර AB, AC දඬු දෙකක් A හිදී සුමටව සන්ධිකර ඇත. BD යන දිග a වන බර රහිත පොල්ලක් B හි දී සුමට ලෙස සම්බන්ධ කර D හිදී AC තුළින් ගමන් කරන සුමට සැහැල්ලු මුදුවකට සම්බන්ධ කර ඇත. පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතාවය ඇත්තේ B හා C සුමට තිරස් තලයක් මත නැවෙමින් ය. A හිදී ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{W}{12}\left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$ බව පෙන්වන්න. තවද A හිදී ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය BD පොල්ලේ තෙරපුමට සමාන බව පෙන්වා තිරසට 15° කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න. ක්‍රියා රේඛාව BC හමුවන ලක්ෂ්‍යය ද සොයන්න.





$A\hat{D}B = 90^\circ$

$\sin 2\theta = \frac{1}{2}$

$2\theta = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \frac{\pi}{12}$

සමතුලිතතාවය සඳහා $R_1 = T$ සහ R_1 ACට ලම්භක වේ. එම නිසා T ද AC ට ලම්භක වේ.

පද්ධතිය සඳහා

බල සිරස්ව විභේදනයෙන්

$\uparrow \quad R + S = 2W$

C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$C\circlearrowleft \quad W.a\cos 75^\circ + W.3a\cos 75^\circ = R.4a\cos 75^\circ = 0$

$\Rightarrow R = W$

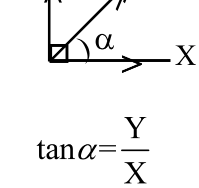
$R = S = W$

AC දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා

A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$A\circlearrowleft \quad T.a\sqrt{3} + W.a\sin 15^\circ - W.2a\sin 15^\circ = 0$

$T = \frac{W\sin 15^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{W}{12}\left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$



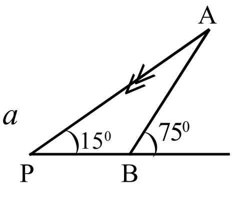
AB දණ්ඩ සඳහා බල තිරස්ව හා සිරස්ව විභේදනය කිරීමෙන් $A = \sqrt{X^2+Y^2} = T$; $\tan\alpha = \frac{Y}{X}$

$\rightarrow \quad X = T\cos 15^\circ$; $\quad \uparrow \quad Y = T\sin 15^\circ$; $\quad = \tan 15^\circ$

$\alpha = 15^0$

ΔABP ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නියමය යෙදීමෙන් $\frac{BP}{\sin 60^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \Rightarrow BP = \frac{2a.\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ}$

$BP = \frac{2a.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1} \quad \Rightarrow BP = \left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)a$



5.4 අභ්‍යාසය

1. සමාන දිග ඇති AB හා AC දඬු 2ක් Aහි දී සුමටව අසව් කර ඇත. AB හා AC දඬුවල බර පිළිවෙළින් W_1 හා W_2 වේ. එකම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි B හා C ලක්ෂ්‍ය දෙකෙන් පද්ධතිය එල්ලා ඇත්තේ $BC = 2a$ හා A සන්ධිය BC ට a දුරක් සිරස්ව පහළින් තිබෙන පරිදිය. A සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් හා සිරස් සංරචක සොයන්න.

2. බර W වන ඒකාකාර AB, BC දඬු දෙකක් B හිදී සුමට ලෙස සන්ධිකර ඒවායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය නොඇදෙන සැහැල්ලු තන්තුවක් මගින් සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුවේ දිග එය තද වී පවතින විට $A\hat{B}C$ 90° වන සේ වේ. තන්තුව තදව පිහිටන සේ පද්ධතිය A ලක්ෂ්‍යයෙන් නිදහසේ එල්ලා ඇත. සමතුලිත අවස්ථාවේ දී AB සිරස සමග සාදන කෝණය $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ බව ද තන්තුවේ ආතතිය $\frac{3W}{\sqrt{5}}$ බව ද පෙන්වන්න. තවද BC මත ප්‍රතික්‍රියාව සොයා එය BC ඔස්සේ ක්‍රියාකරන බව ද පෙන්වන්න.

3. ඒකාකාර AB, AC දඬු දෙකක දිග $2a$ ද බර W ද වේ. එය A හිදී සුමටව සන්ධි කර ඇත. අක්ෂය තිරස් ව අචලව සවිකර ඇති සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක් වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත සන්ධි කළ ඉහත දඬු දෙක තබා ඇත්තේ ඒ එක් එක් දණ්ඩ තිරස්ව θ කෝණයක් සාධන සේය. සිලින්ඩරයේ අරය r නම් $r = a \operatorname{cosec}\theta \cos^3\theta$ බව පෙන්වා A හිදී දඬු මත ක්‍රියාකරන ප්‍රතික්‍රියාවද සොයන්න.

4. AB, BC හා AC දිගින් සමාන ඒකාකාර දඬු තුන A, B, C අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB හා AC හි බර W වන අතර BC හි බර $2W$ වේ. රාමුව C හිදී සුචලව අසව් කර ඇත. BC තිරස සමග $\tan^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ කෝණයක් සඳහා බව පෙන්වා A හා B හිදී ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

5. සමාන ඒකාකාර AOB හා COD දඬු 2හි බර W වන අතර ඒවා O හිදී සුචල ලෙස සන්ධි කර ඇත. $AO = CO = a$ හා $BO = OD = 3a$ වේ. B හා D තිරස් තලයක් මත සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ දිග $3a$ වන අවිතන්‍ය තත්තුවක් මගින් සම්බන්ධ කිරීමෙනි. පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතව පවතී. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{2\sqrt{3}\,W}{9}$ බව පෙන්වා O හි ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

6. බර පිළිවෙළින් $2W$ හා W වන AB හා AC දිගින් සමාන ඒකාකාර දඬු දෙකක් A හිදී සුමටව සන්ධි කර ඇත. B හා C තිරස් තලයක් මත අචලව සවිකර ඇත. A හිදී ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් හා සිරස් සංරචක සොයන්න. B හා C හි ප්‍රතික්‍රියා එකිනෙකට ලම්බක වේ නම් හා $A\hat{B}C = \alpha$ නම් $3\cot\alpha = \sqrt{35}$ බව පෙන්වන්න.

7. OA, AB හා BC සමාන ඒකාකාර දඬු තුනක දිග $2a$ හා බර W වේ. A හා Bහිදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. O කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට අසව් කර තිරස් P බලයක් BC දණ්ඩ මත C හිදී යොදා ඇත. BC තිරස සමග 45° ක කෝණයක් සාදයි. P හි අගය W පදවලින් සොයන්න. O හි ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{\sqrt{37}\,W}{2}$ බව පෙන්වන්න. O හරහා යන සිරස් රේඛාවේ සිට $2a\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{26}}\right]$ දුරකින් C පිහිටන බව පෙන්වන්න.

8. සමාන ඒකාකාර AB, BC දඬු දෙකක එකිනෙකෙහි දිග a හා බර W වේ. ඒවා B හිදී සුමටව සන්ධිකර ඇත. AB දණ්ඩ A හිදී අසව් කර ඇති අතර A වටා නිදහසේ කරකැවිය හැක. කුඩා සැහැල්ලු සුමට මුදුවක් C ට සම්බන්ධ කර ඇති A හරහා යන වෙනත් අචල දණ්ඩක් දිගේ මුදුවට නිදහසේ ලිස්සා යා හැක. අචල දණ්ඩ යටි අතට තිරස සමග α කෝණයක් සාදයි. පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ ඇත්නම්

(i) $\tan B\hat{A}C = \dfrac{1}{2}\cot\alpha$

(ii) B හි ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් සංරචකය $\dfrac{3W}{8}\sin 2\alpha$ බවත් පෙන්වන්න.

9. එක එකෙහි බර W වන සමාන ඒකාකාර AB, BC, CD හා AD දඬු හතරක් ඒවායේ කෙළවරවලදී සුමටව සන්ධි කිරීමෙන් ABCD රොම්බසය සාදා ඇත. එය A වලින් එල්ලා ඇත. පද්ධතිය සමචතුරස්‍රයක හැඩය පවත්වා ගන්නේ BC හා CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය සැහැල්ලු දණ්ඩකට සම්බන්ධ කිරීමෙනි. C හි ප්‍රතික්‍රියාවක් සැහැල්ලු දණ්ඩේ තෙරපුමක් සොයන්න.

10. එක එකෙහි බර W වන සමාන ඒකාකාර AB, BC, CD, DE හා EA දඬු පහක් ඒවායේ අන්ත වන A, B, C, D හා E හිදී සුචල ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් පංචාස්‍රයක් සාදා ඇත. AB හා AE දඬු සිරස සමග α ට සමාන කෝණයක් සාදන අතර BC හා ED දඬු සිරස්ව β ට සමාන කෝණයක් සාදයි. පද්ධතිය A වලින් එල්ලා ඇත. පංචාස්‍රයේ මෙම හැඩය පවත්වා ගන්නේ B හා E සැහැල්ලු දණ්ඩක් මගින් සම්බන්ධ කිරීමෙනි.

(i) C හි ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් හා සිරස් සංරචක සොයන්න.

(ii) BE හි ප්‍රත්‍යා බලය $W(\tan\alpha + \tan\beta)$ බව පෙන්වන්න.

(iii) පංචාස්‍රය සමාකාර පංචාස්‍රයක් වන්නේ නම් මෙම ප්‍රත්‍ය බලයේ අගය සොයන්න.

11. AB, BC, CD හා DA සමාන ඒකාකාර දඬු හතරක එක එකෙහි දිග $2a$ හා බර W වේ. ඒවා A, B, C හා D හිදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. BC හා CD දඬුවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය දිග $2a\sin\theta$ වන සැහැල්ලු දණ්ඩක් මගින් සම්බන්ධ කර රාමුව A වලින් එල්ලා ඇත.

(i) සැහැල්ලු දණ්ඩේ තෙරපුම $4W\tan\theta$ බව පෙන්වන්න.

(ii) B හා C හි ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

12. AB, BC, CD හා AD සමාන ඒකාකාර දඬු හතරක එක එකෙහි බර W වන අතර ඒවායේ දෙකෙළවරදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ABCD සමචතුරස්‍රයක් සාදා ඇත. රාමුව A වලින් එල්ලා ඇත. රාමුවේ මෙම හැඩය පවත්වා ගන්නේ AB හා BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් සම්බන්ධ කිරීමෙනි.

(i) D හි ප්‍රතික්‍රියාව තිරස් බවත් විශාලත්වය $\dfrac{W}{2}$ බවත් පෙන්වන්න.

(ii) තන්තුවේ ආතතිය $4W$ බව පෙන්වන්න.

(iii) C හි ප්‍රතික්‍රියාව $\dfrac{W\sqrt{5}}{2}$ බවත් එය සිරස් සමග $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන බවත් පෙන්වන්න.

(iv) B හි ප්‍රතික්‍රියාව $\dfrac{W\sqrt{17}}{2}$ බවත් එය $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$ කෝණයක් සාදන බවක් පෙන්වන්න.

13. AB, BC, CD හා DA සමාන ඒකාකාර දඬු හතරක් එක එකෙහි බර W වන අතර සුමට ලෙස ඒවායේ කෙළවර සන්ධි කර ABCD සමචතුරස්‍රය සාදා ඇත. රාමුව A වලින් එල්ලා ඇති අතර C ලක්ෂ්‍යයට $3W$ භාරයක් සම්බන්ධ කර ඇත. AB හා AD දඬුවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය සැහැල්ලු දණ්ඩක් මගින් සම්බන්ධ කිරීමෙන් සමචතුරස්‍රාකාර හැඩය පවත්වා ගනී. සැහැල්ලු දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යා බලය $10W$ බව පෙන්වන්න.

14. සමාන W බර ℓ දිග ඒකාකාර දඬු හතරක් සුවල ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් ABCD රාමු සැකිල්ල ගොඩනගා ඇත. ස්වභාවික දිග a වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් A හා C සන්ධි සම්බන්ධ කර ඇත. රාමු සැකිල්ල A වලින් නිදහසේ එල්ලා සමචතුරස්‍රයක හැඩය පවත්වා ගෙන ඇත. තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න. B හා D සන්ධිවල ප්‍රතික්‍රියා ද සොයන්න.

15. එක එකෙහි බර W වන සමාන ඒකාකාර දඬු හයක් ඒවායේ කෙළවරවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් ABCDEF ෂඩාස්‍රය සාදා ඇත. පද්ධතිය A වලින් එල්ලා BF හා CE සැහැල්ලු දඬු දෙකක් මගින් සමාකාර හැඩය පවත්වා ගනී. BF හි ප්‍රත්‍ය බලය CE හි ප්‍රත්‍යා බලය මෙන් පස් ගුණයක් වන බව පෙන්වන්න.

16. දිග පිළිවෙළින් ℓ , 2ℓ , ℓ වන AB, BC හා CD කොටස් තුනකට ඒකාකාර දණ්ඩ කපා ඇත. ඒවා B හා C හිදී සුමට ලෙස සන්ධි කර කේන්ද්‍රය C හා අරය 2ℓ වන සුමට අවල ගෝලයක් මත BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හා A හා D කෙළවර ගෝලයේ ගැටෙන සේ තබා ඇත. BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ දී එය මත ක්‍රියාකරන ප්‍රතික්‍රියාව $\dfrac{91W}{100}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි W යනු දණ්ඩේ බර වේ. C සන්ධියේ දී CD දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයා එහි ක්‍රියා රේඛාව OD හමුවන ලක්ෂ්‍ය සොයන්න.

17. සමාන ඒකාකාර a දිගින් හා W බරින් යුත් AB, BC හා AC දඬු තුනක් ඒවායේ කෙළවරේ දී සුවල ලෙස එකට සම්බන්ධ කිරීමෙන් ABC ත්‍රිකෝණය සාදා ඇත. රාමු සැකිල්ල A හා C හි වූ සුමට ආධාරක දෙකක් මත සිරස් තලයක නිසලව තබා ඇත්තේ AC තිරස්ව හා B , AC ට ඉහළින් වන පරිදි $AD = \dfrac{a}{3}$ වන සේ A B මත වූ D ලක්ෂ්‍යයට බරැති ස්කන්ධයක් සම්බන්ධ කර ඇත. B සන්ධියේ ප්‍රතිකියාව සොයන්න.

18. එක එකෙහි බර W හා දිග $2a$ වන සමාන ඒකාකාර AB හා AC දඬු දෙකක් A හිදී සවල ලෙස සන්ධි කර B හා C අන්ත සුමට තිරස් මේසයක් මත සිරස් තලක තබා ඇත. එක් එක් දණ්ඩ තිරස්ව $\alpha\left(<\dfrac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සැදෙන සේ C හා AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය සැහැල්ලු අවිනත්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර සමතුලිතතාව පවත්වා ගනී. තන්තුවේ T ආතතිය $T = \dfrac{W}{4}\sqrt{1+9\cot^2\alpha}$ වන බව පෙන්වන්න. A හි ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වයත් දිශාවත් සොයන්න.

19. එක එකෙහි බර W වන සමාන ඒකාකාර දඬු පහක් ඒවායේ කෙළවරදී සුමට ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් සමාකාර පංචාස්‍රයක් ගොඩ නගා ඇත. රාමුව සිරස් තලයක පවතින සේ CD දණ්ඩ තිරස් තලයක් මත තබා ඇත. සැහැල්ලු දණ්ඩක් BC හා DE හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යවලට සම්බන්ධ කිරීමෙන් සමාකාර හැඩය පවත්වා ගනී. B හි ප්‍රතික්‍රියාව සොයා සැහැල්ලු දණ්ඩේ ආතතිය $\left[\cot\dfrac{\pi}{5}+3\cot\dfrac{2\pi}{5}\right]W.$ බව පෙන්වන්න.

20. සමාන ඒකාකාර AB, BC, CD දඬු තුනක් එක එකෙහි දිග $2a$ හා බර W වේ. දඬු B හා C හිදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇති අතර AB හා CD එකම මට්ටමේ සුමටතා දැති දෙකක් මත ගැටෙන සේ නිසලතාවයේ තබා ඇත. සමතුලිත අවස්ථාවේ AB හා CD සිරස සමග α කෝණයක් සාධන අතර BC තිරස් වේ. සුමටතා දැති අතර දුර $2a\left(1+\frac{2}{3}\sin^3\alpha\right)$ බව සාධනය කරන්න. B හිදී ප්‍රතික්‍රියාව සිරස සමග සාධන කෝණය β නම් $\tan\alpha \,.\, \tan\beta = 3$ බව පෙන්වන්න.

6.0 රාමු සැකිලි

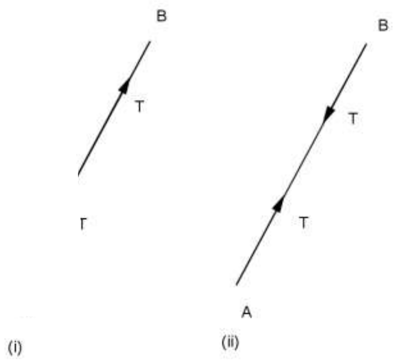
මෙම පරිච්ඡේදයේ දී සැහැල්ලු දඬු ඒවායේ කෙළවරවලදී වෙනත් දඬු සමග සුමට ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් සාදාගත් දඬුවලින් සැකසු රාමු සැකිල්ල සලකමු.

6.1 දෘඪ රාමුව

බාහිර බල මගින් රාමුවේ හැඩය වෙසස් කළ නොහැකි නම් එම රාමුවට දෘඪ රාමුවක් යයි කියමු.

රාමුව සැහැල්ලු දඬුවලින් සාදා ඇති නිසා සන්ධිවල ප්‍රතික්‍රියා දඬු දිගේ ක්‍රියා කරයි. මෙම දඬු දිගේ ක්‍රියා කරන ප්‍රතික්‍රියා ප්‍රත්‍යා බල ලෙස හඳුන්වයි.

රාමුවේ AB සැහැල්ලු දණ්ඩ සැලකූ විට A හා Bහිදී කුරු මගින් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියා R_Aහා R_B වේ. දණ්ඩ මෙම R_A හා R_B. දෙකෙන් සමතුලිතතාව සැලකූ විට R_A හා R_B දණ්ඩ දිගේ සමාන හා ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට ක්‍රියා කරයි.



$R_A = R_B = T$

(i) T තෙරපුමකි

(ii) T ආතතියකි

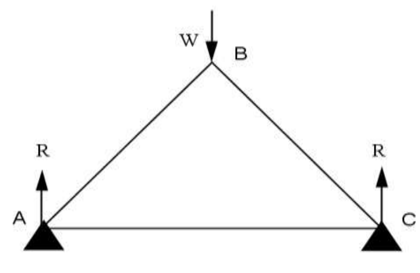
රාමු සැකිලි ගැටලු විසඳීමේ දී උපකල්පන

- රාමු සැකිල්ලේ ඇති සියලු ම දඬු සැහැල්ලු ඒවාය
- සියලු ම දඬු සුචලව (සුමටව) ඒවායේ කෙළවරවලදී සන්ධිකර ඇත. සන්ධිවලදී යුග්මයක් නොපවතී
- සන්ධිවලදී ප්‍රතික්‍රියා (බාහිර බල හැර) දඬු දිගේ ක්‍රියාකරයි. මේවා ආතති හෝ තෙරපුම් විය හැක.
- රාමුවේ සියලු ම දඬු එකම සිරස් තලයේ වේ (බාහිර බල ඇතුලු) සියලු බල ඒක තල බල වේ
- බාහිර බල යෙදිය හැක්කේ සන්ධිවලදී පමණි

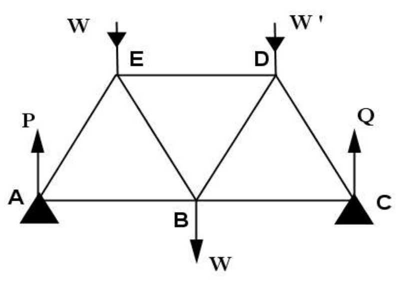
6.2 සමතුලිතතාවයේ ඇති සැහැල්ලු රාමු සැකිල්ලක බාහිර බල නිරූපණය

උදාහරණ 1

ABC ත්‍රිකෝණාකාර රාමුව A හා C ආධාරක මත තබා B හිදී W භාරයක් දරයි. සමමිතිකත්වය අනුව A හා C හි ප්‍රතික්‍රියා සමාන වේ.



උදාහරණ 2



ABCDE රාමුව සමාන සැහැල්ලු දඬු හතකින් සාදා ඇති අතර A හා C හි වූ කුඤ්ඤ දෙකක් මත තබා ඇත. B හා E හිදී W බර 2ක් ද D හිදී W භාරයක්ද දරා සිටී. P හා Q බාහිර බල සිරස් විය යුතුය.

බෝ අංකනය

- මෙම අංකනය හඳුන්වා දුන් ගණිතඥයා බෝ නමින් හැඳින්වේ.
- සියලු ම බාහිර බල රාමුවේ පිටතින් නිරූපණය කරයි.
- බල අතර ප්‍රදේශය (විවෘත හෝ සංවෘත) ඉංග්‍රීසි හෝඩියේ කුඩා අකුරුවලින් හෝ ඉලක්කම්වලින් නිරූපණය කරයි.
- සෑම බලයක්ම එම බලය මගින් ගොඩ නැගෙන ප්‍රදේශ දෙකට අයත් අකුරු දෙකෙන් නිරූපණය කරයි.

බෝ අංකනය භාවිත කරමින් ගැටලු විසඳීම

(i) සියලු බාහිර බල හා රාමුවේ එක් එක් සන්ධිය සඳහා බල බහුඅස්‍රය ඇඳිය යුතුය. (මෙම බල බහුඅස්‍රය සංවෘත රූපයකි. බහු අස්‍රයේ ශීර්ෂ ප්‍රදේශ දක්වෙන නමෙහි අකුරින් නිරූපණය වේ.)

(ii) බල සටහනෙන් ලබා ගන්නා ත්‍රිකෝණ හා බහුඅස්‍ර සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත හා වීජීය සමීකරණ භාවිත කරමින් දඬු තුළ ප්‍රත්‍ය බලවල අගය ගණනය කළ හැක.

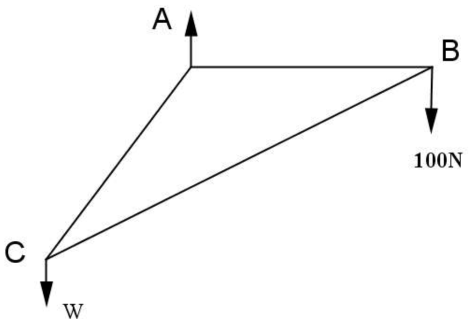
(iii) පාදයේ නම කියවීමෙන් ප්‍රත්‍යබල සටහනෙහි ඊතල ලකුණක් භාවිතයෙන් ප්‍රත්‍ය බලයේ දිශාව ලකුණු කළ යුතුය.

(iv) බල බහුඅස්‍රය ගොඩ නැගීමේ දී සියලු ම සන්ධි සඳහා දිශාව එකම විය යුතුය. (එක්කෝ දක්ෂිණාවර්ත නැත්නම් වාමාවර්ත)

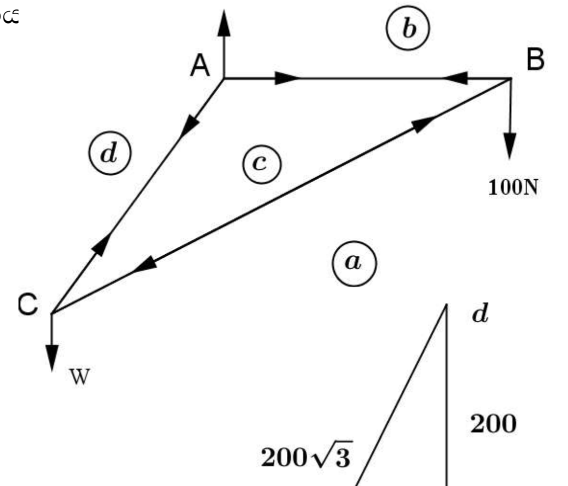
(v) බල බහුඅස්‍රයක් ඇඳීම සඳහා සන්ධියක නොදන්නා බල උපරිම වශයෙන් දෙකක් වන සේ සන්ධිය තෝරා ගත යුතුය.

6.3 විසඳූ නිදසුන්

උදාහරණ 1



දෙන ලද රූපයේ ABC ත්‍රිකෝණාකාර රාමු කට්ටුව සුමට ලෙස සන්ධි කළ සැහැල්ලු AB, BC, CA, දඬු තුන මගින් සමන් විත වේ. මෙහි $AB = AC$ හා $B\hat{A}C = 120^\circ$. AB තිරස් වන සේ රාමුව සිරස් තලයක වේ. එය A හිදී සුමට නා දූත්තක් මත රඳවා B හි 100 N භාරයක් ද C හි W N භාරයක් දරා සිටී බෝ අංකනය යොදා ගනිමින් ප්‍රත්‍යබල සටහනක් අඳින්න. එමගින් දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල ගණනය කරන්න. ඒවා ආතතිද තෙරපුම් ද යන්න හඳුනා ගන්න. W හි අගය



B සන්ධියෙන් ආරම්භ කරමු

සන්ධිය	පිළිවෙළ	බහුඅස්‍රයේ නම
B	$a \to b \to c \to a$	Δabc
C	$a \to c \to d \to a$	Δbcd

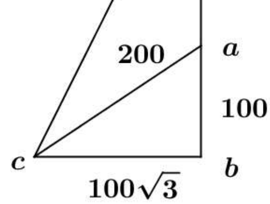
$AB(bc) =$ ආතතිය $= 100\sqrt{3}$ N

$BC(ca) =$ තෙරපුම $= 200\sqrt{3}$ N

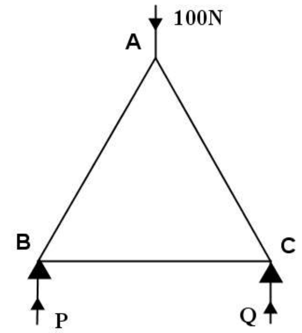
$CA(cd) =$ ආතතිය $= 200\sqrt{3}$ N

$W(ad) = 200$ N

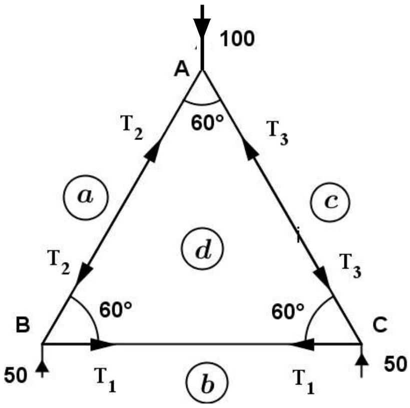
මෙම ගැටලුවේ දී සියලු ම සන්ධි වාමාවර්ත දිශාවට ගෙන ඇත.



උදාහරණ 2



ABC රාමුව AB, BC හා AC සමාන සැහැල්ලු දඬු තුන සන්ධි කිරීමෙන් ලබා ගෙන ඇත. B හා C එකම තිරස් මට්ටමේ වූ සුමට නා දැති 2 ක් මත තබා ඇත. A හිදී 100N භාරයක් දරයි. B හා C හිදී ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. බෝ අංකනය යොදා ගැනීමෙන් ප්‍රත්‍යබල සටහනක් අඳින්න. එමගින් එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යබල සොයා ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන වග හඳුනා ගන්න.



සමතුලිතතාව සඳහා

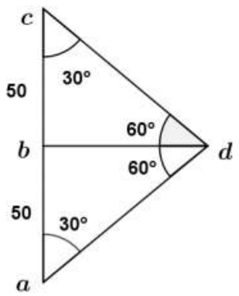
බල සිරසට විභේදනයෙන්

$$\uparrow P + Q = 100$$

$$P = Q = 50 \quad \text{(සමමිතියෙන්)}$$

A, B හා C සන්ධි සඳහා බල බහුඅස්‍ර ඇඳිය යුතුවේ. බල අතර ප්‍රදේශ a,b,c හා d ලෙස නම් කර ඇත.

ප්‍රත්‍ය බල සටහන



මෙම ප්‍රත්‍ය බල සටහන ඇඳීමේදී එක් එක් සන්ධිය වටා ප්‍රදේශය ගැනීම වාමාවර්ත දිශාවට ගෙන ඇත. C වලින් ආරම්භ කර

C සන්ධිය $\rightarrow$ A සන්ධිය $\rightarrow$ B සන්ධිය

සන්ධිය	පිළිවෙළ	බහුඅස්‍රයේ නම
C	$b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$	Δbcd
A	$d \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow d$	Δacd

ආතති හා තෙරපුම් ප්‍රදේශවල නමින් දක්වා ඇත.

$$T_1 = bd = 50 \tan 30° = \frac{50}{\sqrt{3}} \text{ N}$$

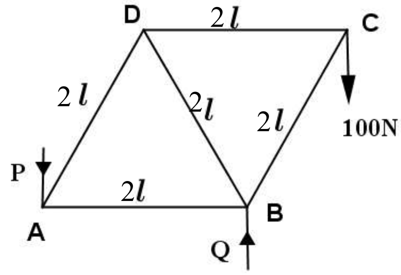
$$T_3 = dc = 50 \sec 30° = \frac{100}{\sqrt{3}} \text{ N}$$

$$T_2 = ad = 50 \sec 30° = \frac{100}{\sqrt{3}} \text{ N}$$

දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යබලය	තෙරපුම්	ආතති
AB	$\frac{100}{\sqrt{3}}$ N	✓	-
BC	$\frac{50}{\sqrt{3}}$ N	-	✓
AC	$\frac{100}{\sqrt{3}}$ N	✓	-

උදාහරණ 3

දී ඇති රූපයේ සැකිල්ල සමාන සැහැල්ලු දඬු පහකින් සාදා ඇත. මෙම රාමුව B හිදී නා දැත්තක් මත රඳවා A හිදී සිරස් බලයක් යොදා ඇති අතර C හිදී 100 N භාරයක් දරයි. ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් ඇඳ එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍ය බලය සොයන්න.



සමතුලිතතාව සඳහා

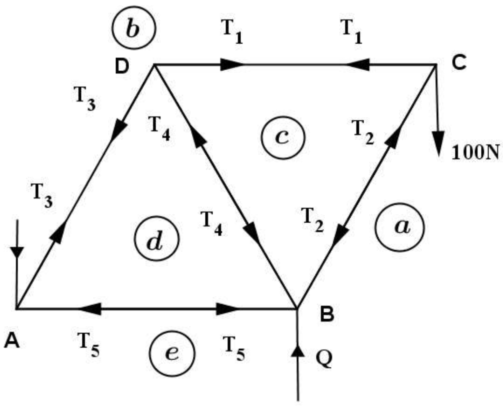
බාහිර බල සිරසට විභේදනයේ

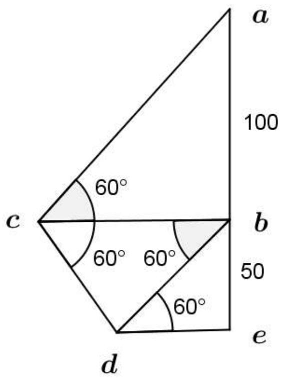
$\uparrow\ 100 + P = Q$ .... ①

A වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

$A\circlearrowleft \quad Q.2\ell = 100\,(2\ell + 2\ell\cos 60^\circ)$ ....②

① and ② $\Rightarrow$ P = 50 N , Q = 150 N





ඉහත රූපසටහනේ C වලින් පටන්ගෙන ප්‍රදේශ නම් කර ඇත. ප්‍රත්‍යබල සටහන පහත අයුරු ඇඳ ඇත.

සන්ධිය	පිළිවෙළ	බහුඅස්‍රයේ නම
C	$a \to b \to c \to a$	Δabc
D	$b \to d \to c \to b$	Δbcd
A	$d \to b \to e \to d$	Δdbe
B	$c \to d \to e \to a \to c$	$\square acde$

බල බහුඅස්‍ර ඇඳීම C සන්ධියෙන් පටන්ගෙන ප්‍රදේශ වාමාවර්ත අතට ගෙන ඇත.

$T_1 = cb = 100\tan 30^\circ = \dfrac{100\sqrt{3}}{3}$ N

$T_2 = ac = 100\sec 30^\circ = \dfrac{200\sqrt{3}}{3}$ N

$T_3 = db = 50\,\mathrm{cosec}\,60^\circ = \dfrac{100\sqrt{3}}{3}$ N

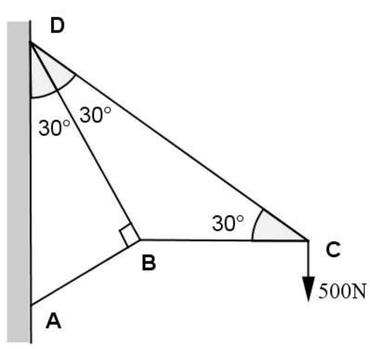
$T_4 = cd = db = \dfrac{100\sqrt{3}}{3}$ N

$T_5 = ed = 50\tan 30^\circ = \dfrac{50\sqrt{3}}{3}$ N

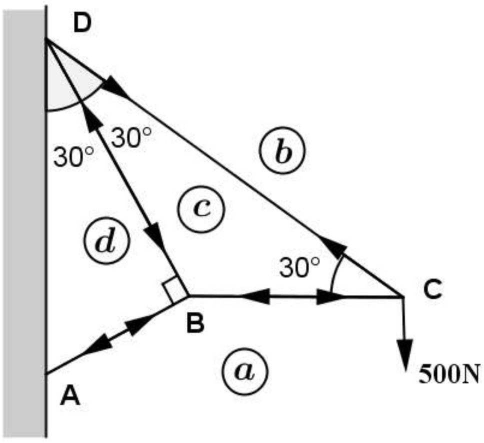
දණ්ඩ	ප්‍රත්‍ය බලය	
DC	$\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$ N	ආතති
BC	$\dfrac{200\sqrt{3}}{3}$ N	තෙරපුම්
AD	$\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$ N	ආතති
BD	$\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$ N	තෙරපුම්
AB	$\dfrac{50\sqrt{3}}{3}$ N	තෙරපුම්

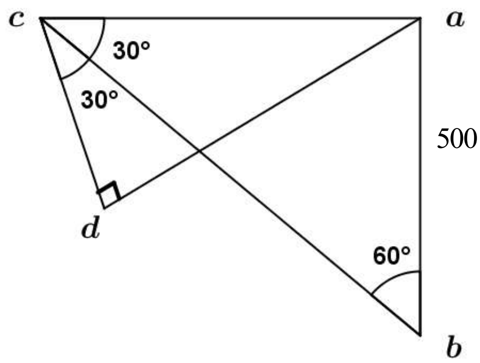
උදාහරණ 3

රාමු සැකිල්ල AB, BC, CD හා BD සැහැල්ලු දඬු හතරින් දෙන ලද රූපයේ දැක්වෙන අයුරු ගොඩ නගා ඇත. A හා D සුමට ලෙස සිරස් බිත්තියට සම්බන්ධ කර ඇත. C සන්ධිය 500 N භාරයක් දරයි. BC තිරස්ව පවතී. බෝ අංකනය භාවිත කර ප්‍රත්‍යබල සටහනක් අඳින්න. එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍ය බලය සොයා ඒවා ආතති ද තෙරපුම් දැයි වෙන් කර හඳුනා ගන්න.



C ලක්ෂ්‍යයේ එක් බලයක් දන්නා අතර ඉතිරි බල දෙක නොදනී බල සටහන ඇඳීම C සන්ධියෙන් අරඹමු.





සන්ධිය	පිළිවෙළ	බහුඅස්‍රයේ නම
C	$a \to b \to c \to a$	Δabc
B	$a \to c \to d \to a$	Δacd

$cb = 500 \sec 60° = 1\ 000$ N

$ac = 500 \tan 60° = 500\sqrt{3}$ N

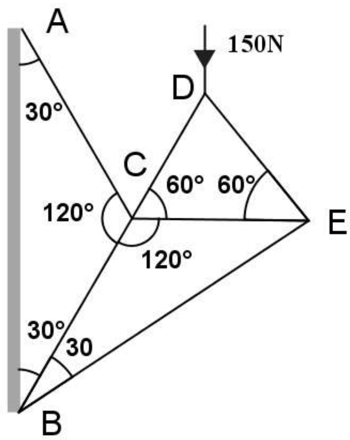
$cd = (500\sqrt{3}\text{ N}) \sin 30° = 250\sqrt{3}$ N

$ad = 500\sqrt{3}\text{ N} \cos 30° = 750$ N

දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යබලය	තෙරපුම්	ආතති
DC	1 000 N	-	✓
BC	$500\sqrt{3}$ N	✓	-
BD	$250\sqrt{3}$ N	✓	-
AB	750 N	✓	-

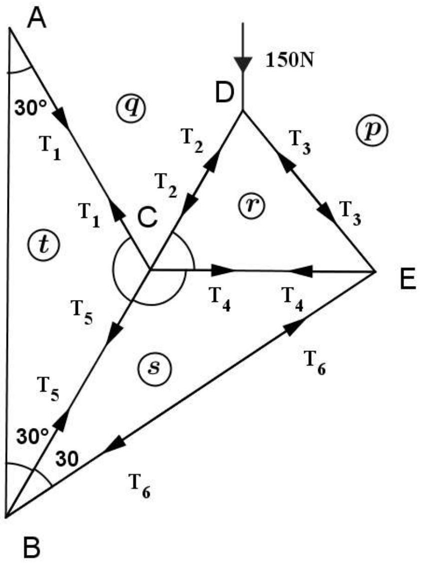
උදාහරණ 5

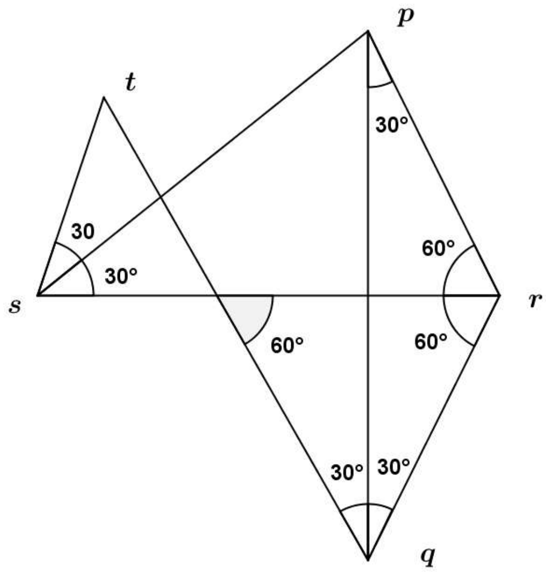
දෙන ලද රූපය සැහැල්ලු දඬු හයක් සුමට ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් ගොඩනගන ලද රාමු සැකිල්ලක් දක්වයි. දඬු C, D හා E හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. A හා Bහිදී සිරස් බිත්තියකට සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. D හිදී 150N භාරයක් දරයි. බෝ අංකනය භාවිත කරමින් ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් අඳින්න. එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍ය බල සොයා ඒවා තෙරපුම් ද ආතතිද යන්න හඳුනා ගන්න.



මෙහි එක බලයක් දන්නා නොදන්නා බල 2ක් ඇති ලක්ෂ්‍ය D වේ. එබැවින් D සන්ධියෙන් ඇඳීම අරඹමු.

සන්ධිය	පිළිවෙළ	බහුඅස්‍රයේ නම
D	$p \to q \to r \to p$	Δpqr
E	$p \to r \to s \to p$	Δprs
C	$r \to q \to t \to s \to r$	$\square rqts$





$AC = tq = 75\sqrt{3} + 25\sqrt{3} = 100\sqrt{3}$ N

$CD = rq = 75 \sec 30° = 50\sqrt{3}$ N

$DE = rp = qr = 50\sqrt{3}$ N

$CE = sr = 100\sqrt{3}$ N

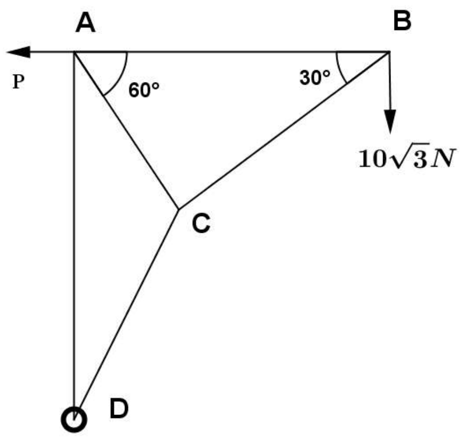
$BC = st = 50\sqrt{3}$ N

$BE = ps = 150\sqrt{3}$ N

දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යා බලය	තෙරපුම්	ආතති
AC	$100\sqrt{3}$ N	-	✓
CD	$50\sqrt{3}$ N	✓	-
DE	$50\sqrt{3}$ N	✓	-
CE	$100\sqrt{3}$ N	-	✓
BC	$50\sqrt{3}$ N	-	✓
BE	$150\sqrt{3}$ N	-	✓

උදාහරණ 6

AB, BC, CD, DA හා AC දඬු පහ ඒවායේ අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් රූපයේ දැක්වෙන අයුරු රාමු සැකිල්ල ගොඩනගා ඇත. $A\hat{B}C = A\hat{D}C = D\hat{A}C = 30°$ හා රාමු සැකිල්ල D හි දීම සුමටව අසව් කොට $10\sqrt{3}$ N භාරයක් B හිදී දරා සිටී. A හිදී තිරස් P බලයක් මගින් AB තිරස් වන සේ සිරස් තලයක රාමු සැකිල්ල තබා ඇත.



(i) P හි අගය සොයන්න.

(ii) D හි ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

(iii) බෝ අංකනය යොදා ගනිමින් රාමු සැකිල්ල සඳහා ප්‍රත්‍යබල සටහන අඳින්න. සියලු දඬුවල ප්‍රත්‍ය බල සොයා ඒවා ආතතිද තෙරපුම් ද යන වග හඳුනා ගන්න.

(i) සමතුලිතතාව සඳහා

D වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

D↺ $P.AD - 10\sqrt{3}\,AB = 0$

$$\text{නමුත්}\ AD = 2\,AC\cos 30^\circ$$
$$= 2\,AB\cos 60^\circ\cos 30^\circ$$

$$AD = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$$

$$\therefore\ P.\frac{\sqrt{3}}{2}AB = 10\sqrt{3}\,AB$$

$$\therefore\ P = 20\text{ N}$$

D හි ප්‍රතික්‍රියාව R යයි ද R තිරස සමග සාදන කෝණය θ යයි ද සිතමු.

බාහිර බල සිරසට විභේදනයෙන්

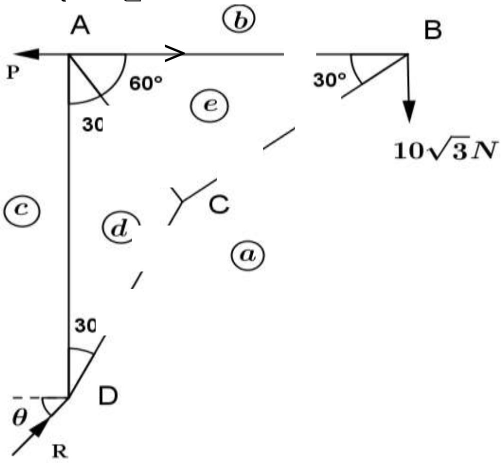
$$\uparrow R\sin\theta = 10\sqrt{3}$$

බාහිර බල තිරසට විභේදනයෙන්

$$\rightarrow R\cos\theta = P = 20\text{ N}$$

$$R = \sqrt{\left(10\sqrt{3}\right)^2 + 20^2} = 10\sqrt{7}$$

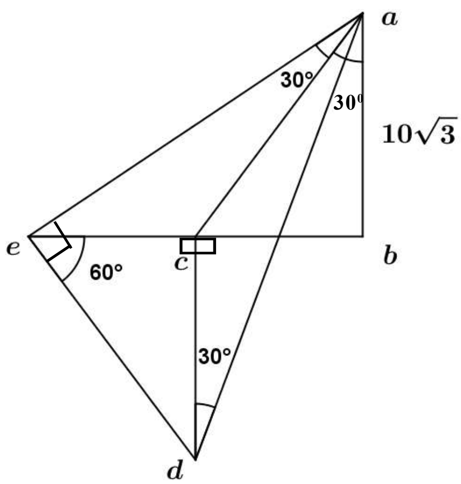
$$\tan\theta = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ; \quad \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$$



පද්ධතිය බල තුනක් යටතේ සමතුලිත වන නිසා R ප්‍රතික්‍රියාව B හරහා යා යුතුය.

බල සටහන B සන්ධියෙන් වාමාවර්ත අතට ඇඳීම අරඹමු.

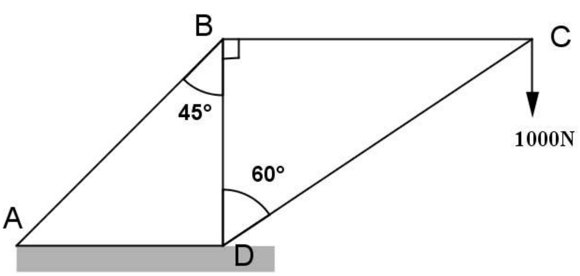
සන්ධිය	පිළිවෙළ	බහුඅස්‍රයේ නම
B	$a \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow a$	Δabd
C	$a \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow a$	Δaed



දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යාබලය	විශාලත්වය
AB	ආතති	30 N
BC	තෙරපුම්	$20\sqrt{3}$ N
AC	තෙරපුම්	20 N
DC	තෙරපුම්	40 N
AD	ආතති	$10\sqrt{3}$ N

$$eb = 10\sqrt{3}\tan 60 = 30$$
$$ea = 10\sqrt{3}\sec 60 = 20\sqrt{3}$$
$$ad = 20\sqrt{3}\sec 30 = 40$$
$$de = ea\tan 30 = 20$$
$$cd = de\sin 60 = 10\sqrt{3}$$

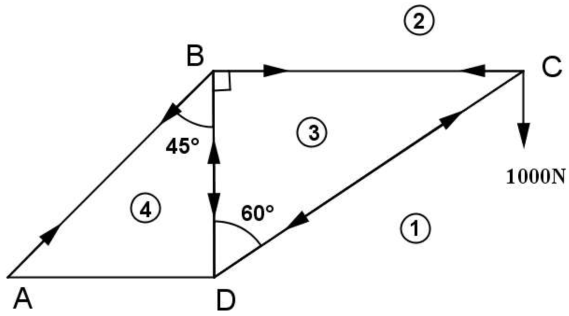
උදාහරණ 7



AB, BC, CD හා BD දඬු හතර සුචල ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් දෙන ලද රූපයේ පෙන්වන දොඹකරය සාදා ඇත. BC දණ්ඩ තිරස් වන අතර BD දණ්ඩ සිරස්වේ. දොඹකරය තිරස් පොළොවට A හා D හිදී අචලව සවිකර ඇත. C හිදී 1 000 N භාරයක් එල්ලා ඇත. බෝ අංකනය භාවිත කරමින් දඬුවල ප්‍රත්‍ය බල සොයා ඒවා ආතතිද තෙරපුම්ද යන වග දක්වන්න.

C සන්ධියෙන් වාමාවර්ත අතට ඇඳීම අරඹමු

සන්ධිය	පිළිවෙළ	බහුඅස්‍රයේ නම
C	$1 \to 2 \to 3 \to 1$	$\Delta 123$
B	$3 \to 2 \to 4 \to 3$	$\Delta 324$



$AB = ④② = 1000\sqrt{6}$ N

$BC = ③② = 1\,000 \cot 30^0 = 1\,000\sqrt{3}$ N

$CD = ③① = 1\,000 \operatorname{cosec} 30° = 2\,000$ N

$BD = ④③ = ③② = P.\ell \cos 30° - 1000\sqrt{3}\, N$

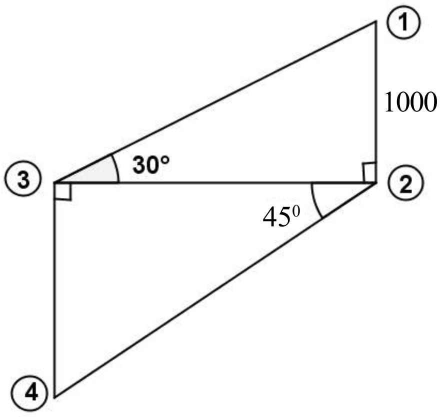
$\Rightarrow P = 40$ N

$\rightarrow\ P = R\cos\theta = 40$ N

$\uparrow R\sin\theta = 10\sqrt{3}$ N

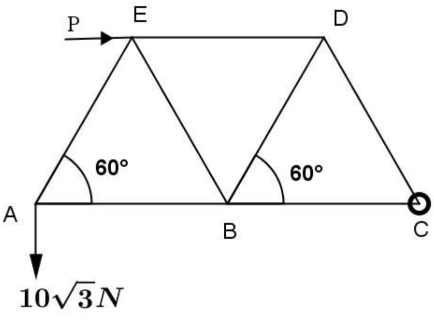
$R = \sqrt{40^2 + \left(10\sqrt{3}\right)^2}$ N

$R = 10\sqrt{19}$ N



දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යබලය	තෙරපුම්	ආතති
AB	$1000\sqrt{6}$ N	-	✓
BC	$1000\sqrt{3}$ N	-	✓
CD	2 000 N	✓	-
BD	$1000\sqrt{3}$ N	✓	-

උදාහරණ 8



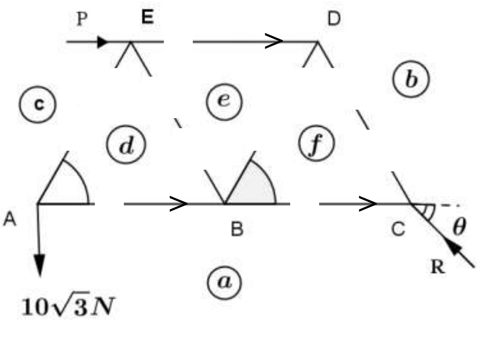
AB, BC, CD, DE, EA, EB හා BD දඬු හත සුමට ලෙස ඒවායේ දෙකෙළවරදී සන්ධි කිරීමෙන් දෙන ලද රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල සාදා ඇත. මෙම රාමුව C හිදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇති අතර $10\sqrt{3}$ N භාරයක් A හිදී දරයි. තිරස් P බලයක් E හිදී යෙදීමෙන් ED තිරස්ව හා රාමුව සිරස් තලයක වන සේ සමතුලිතව පවත්වාගෙන ඇත.

(i) E හි P බලයේ අගය සොයන්න.

(ii) C හි ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

(iii) බෝ අංකනය භාවිත කර ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් අඳින්න. එවායින් දඬුවල ප්‍රත්‍ය බල සොයා ඒවා ආතති ද නැතිනම් තෙරපුම ද බව හඳුනා ගන්න.

(iv) බල සටහන ඇසුරින් C හි ප්‍රත්‍ය බලය ගණනය කරන්න. බාහිර බල සමතුලිතතාව සඳහා C වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්



ꞇ $P.\ell\cos 30^0 - 10\sqrt{3}.2\ell = 0$ මෙහි ℓ යනු දණ්ඩේ දිග වේ.

$\Rightarrow P = 40N$

තිරස් දිශාවට බල විභේදනනේ

$\rightarrow$ $P = R\cos\theta = 40N$

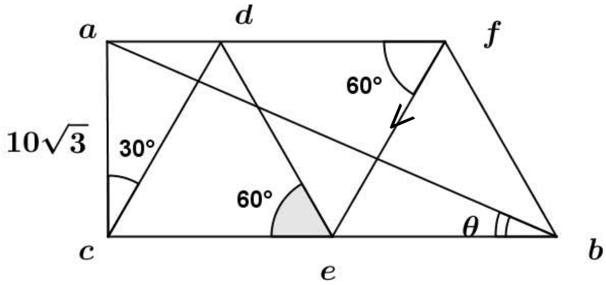
සිරසට විභේදනයෙන්

$\uparrow R\sin\theta = 10\sqrt{3}N$

$R = \sqrt{40^2 + \left(10\sqrt{3}\right)^2}$

$R = 10\sqrt{19}N$

$\tan\theta = \dfrac{10\sqrt{3}}{40} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$



බල සටහන

A සන්ධියෙන් දක්ෂිණාවර්ත අතට බල සටහන ඇඳීම අරඹමු.

සන්ධිය	පිළිවෙළ	බහුඅස්‍රයේ නම
A	$c \rightarrow a \rightarrow d \rightarrow c$	Δcad
E	$c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow c$	$\square cdeb$
D	$b \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow b$	Δbef

af , bf යාකරමු

$AB = ad = 10\sqrt{3}\tan 30° = 10\text{ N}$

$AE = cd = 10\sqrt{3}\sec 30° = 20\text{ N}$

$cd = de = 20\text{ N}$

$AE = BE = 20\text{ N}$

$bf = de = ef = df = 20\text{ N}$

$CD = DE = BD = 20\text{ N}$

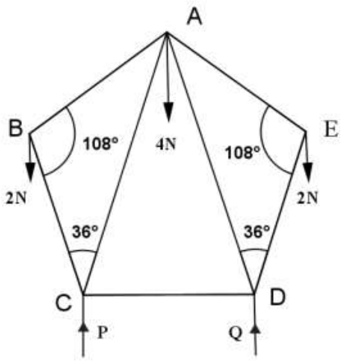
C හිදී ප්‍රතික්‍රියාව $a\,b$ මගින් දෙනු ලැබේ

$ab^2 = \left(10\sqrt{3}\right)^2 + 40^2$

$ab = 10\sqrt{19}$

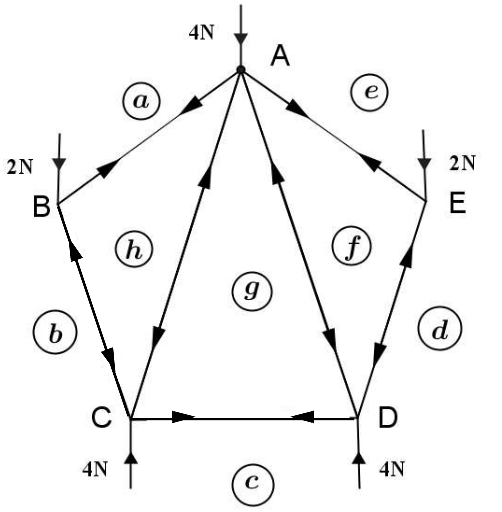
දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යාබලය	
AB	10 N	තෙරපුම්
BC	30 N	තෙරපුම්
CD	20 N	තෙරපුම්
DE	20 N	තෙරපුම්
EA	20 N	ආතති
EB	20 N	තෙරපුම්
DB	20 N	ආතති

උදාහරණ 9



ABCDE යන රාමු සැලකිල්ල සැහැල්ලු දඬු හතක් සුවල ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් රාමු සකස් කර ඇත. එහි සමාකාර පංචාස්‍රයක හැඩය ගොඩ නගා ඇත්තේ AC හා BD විකර්ණවල ඇති සැහැල්ලු දඬු දෙක මගිනි. රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක CD දණ්ඩ තිරස්ව පහළින්ම වන සේ තබා ඇත්තේ C හා D හිදී සිරස්ව උඩු අතට විශාලත්වය P හා Q වන බල දෙකක් යෙදීමෙනි. 2 N, 4 N, 2 N භාර පිළිවෙළින් B, A හා E වලදී එල්ලා ඇත. බෝ අංකනය භාවිත කරමින් මෙම රාමු කට්ටුව සඳහා ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් අඳින්න. එනයින් දඬු හත සඳහා ප්‍රත්‍යාබල නිර්ණය කරන්න. ඒවා ආතතිද තෙරපුම් ද යන වග දක්වන්න. ඔබේ පිළිතුර $\cos\dfrac{n\pi}{10}$ පදවලින් දෙන්න.

මෙහි n පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.



පද්ධතියේ සමතුලිතතාව සඳහා

බල සිරස්ව විභේදනයෙන්

$$P + Q = 8\text{ N}$$

$$\uparrow \quad P = Q \quad \text{සමමිතියෙන්}$$

$$P = Q = 4\text{ N}$$

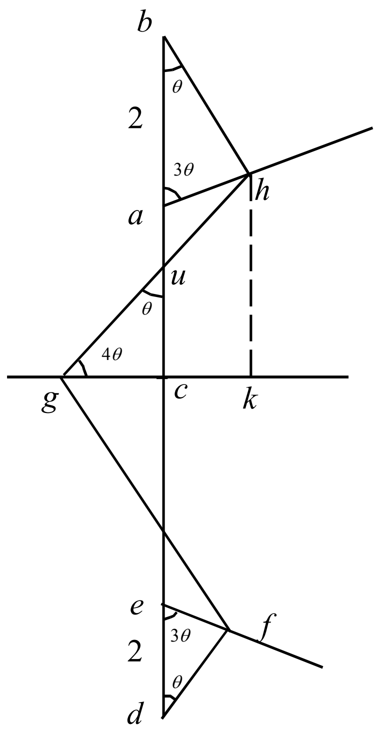
A හරහා යන සිරස් රේඛාවට වටා පද්ධතිය සමමිතික වේ.

B සන්ධියෙන් ඇඳීම ආරම්භ කර දක්ෂිණාවර්ත අතට ගමන් කරමු.

පළමුව සිරස් රේඛාව ඇඳ සිරස් බල ලකුණු කරමු. දක්ෂිණාවර්ත අතට

ba, ae, ed, dc, cd ලෙස ගනිමු.

$$\theta = \frac{\pi}{10} = 18^0$$



සන්ධිය	පිළිවෙළ	බහුඅස්‍රයේ නම
B	$b\to a\to h\to b$	Δ bah
E	$e\to d\to f\to e$	⬠ edf
A	$h\to a\to e\to f\to g\to h$	$haefg$
C	$b\to h\to g\to c\to b$	◻ $bhgc$

Δabh ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතියෙන්

$$\frac{ah}{\sin\theta} = \frac{2}{\sin 4\theta} = \frac{bh}{\sin 3\theta}$$

$$ah = 2\frac{\sin\theta}{\sin 4\theta} = \frac{2\cos 4\theta}{\cos\theta},$$

$$bh = 2\frac{\sin 3\theta}{\sin 4\theta} = \frac{2\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

abh හා def ත්‍රිකෝණ අංග සම වේ.

$$\therefore ef = ha = \frac{2\cos 4\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore df = hb = \frac{2\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

$eg = x$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $uc = x\tan 4\theta$

bhu Δ න්

$$\frac{4 - x\tan 4\theta}{\sin 2\theta} = \frac{hb}{\sin\theta}$$

$$x = \frac{4 - x\tan 4\theta}{\sin 2\theta} = \frac{2\cos 2\theta}{\cos\theta.\sin\theta}$$

$$gh = gu + uh = \frac{x}{\cos 4\theta} + \frac{2\cos 2\theta}{\cos\theta} = \frac{2\sin\theta + 2\cos 2\theta}{\cos\theta\cos 2\theta}$$

මෙහි $fg = gh$

$$4 - x\tan 4\theta = \frac{2\cos 2\theta.2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$4 - x\tan 4\theta = 4\cos 2\theta$$

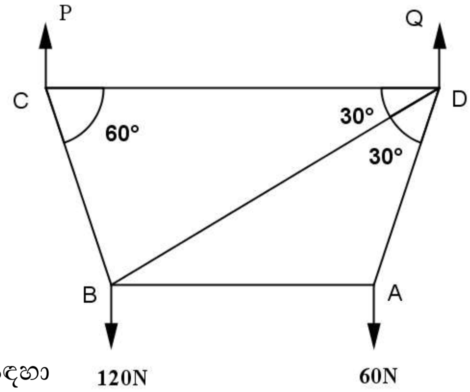
$$x\tan 4\theta = 4(1 - \cos 2\theta)$$

$$x = \frac{4(1-\cos 2\theta)}{\tan 4\theta}$$

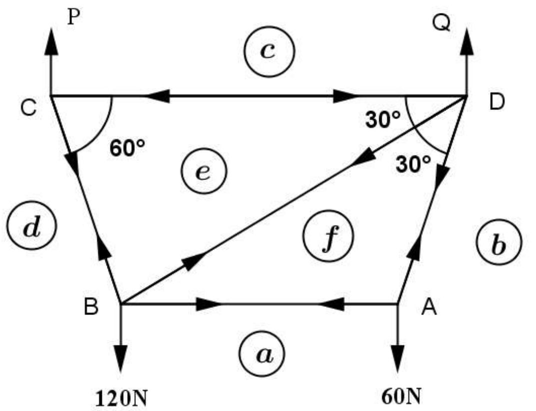
$$x = cg$$

දණ්ඩ	ප්‍රත්‍ය බලය	තෙරපුම්	ආතති
AB	ha	-	✓
BC	hb	✓	-
AE	ef	-	✓
ED	df	✓	-
AC	gh	✓	-
AD	fg	✓	-
DC	cg	-	✓

උදාහරණ 10



දෙන ලද රාමුව සැහැල්ලු AB, AD, BC, BD හා CD දඬු පහෙන් සමන්විත වන අතර ඒවායේ අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. පිළිවෙළින් B හා A හිදී 120 N හා 60 N බර දරයි. PN හා QN සිරස් බල දෙකක් C හා D හිදී යෙදීමෙන් AB හා CD තිරස්ව පවත්වා ගනී. බෝ අංකනය භාවිත කරමින් ප්‍රත්‍යා බල සටහනක් අඳින්න. ආතති හා තෙරපුම් වෙන් කර දක්වමින් දඬු පහේ ප්‍රත්‍යා බල සොයන්න.

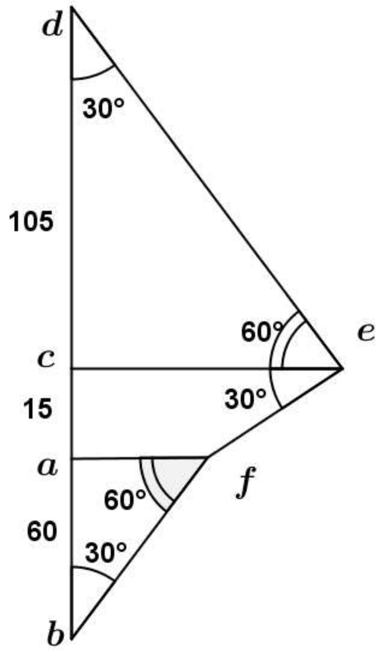


සමතුලිතතාව සඳහා

බල සිරසට විභේදනයෙන්

$$\uparrow P + Q - 120 - 60 = 0$$

$$P + Q = 180N$$



D වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$P.\,2\ell - 60.\ell\cos 60 - 120.(\ell + \ell\cos 60) = 0$$

$$2P = 30 + 180$$

$$\Rightarrow P = 105N$$

$$\Rightarrow Q = 180 - 105 = 75N$$

බල සටහන

C සන්ධියෙන් වාමාවර්ත අතට ඇඳීම අරඹමු

C → B → A

Step I : Cm   Step II : Bm   Step III : Am

$AB = fa = 60 \tan 30° = 20\sqrt{3}$ N

$BC = ed = 105 \sec 30° = 70\sqrt{3}$ N

$CD = ec = 105 \tan 30° = 35\sqrt{3}$ N

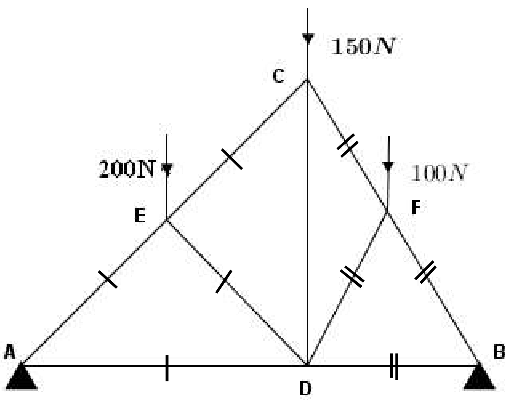
$AD = bf = 60 \sec 30° = 40\sqrt{3}$ N

$BD = fe = 15 \sec 30° = 10\sqrt{3}$ N

දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යා බලය	
AB	$20\sqrt{3}$ N	ආතති
BC	$70\sqrt{3}$ N	ආතති
CD	$35\sqrt{3}$ N	තෙරපුම්
AD	$40\sqrt{3}$ N	ආතති
BD	$10\sqrt{3}$ N	ආතති

6.4 අභ්‍යාසය

1.

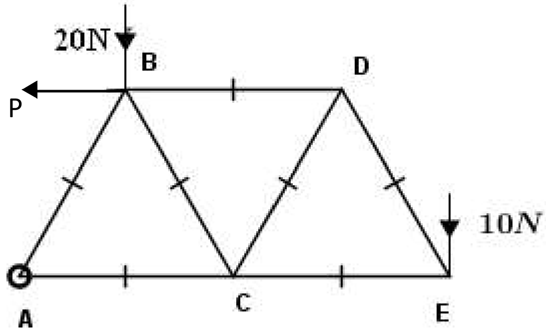


වහලක් රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ලෙන් ඉදිරිපත් වේ. එහි බර රූපයේ දැක්වෙන අයුරු බෙදී ගොස් ඇතැයි සැලකිය හැක.

i. A හා B හි ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

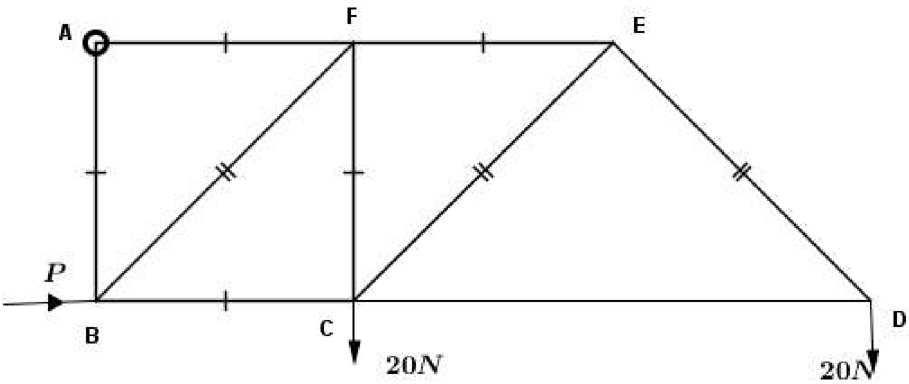
ii. බෝ අංකනය භාවිතයෙන් ප්‍රත්‍යා බල සටහනක් ඇද එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යා බල සොයා ආතති හා තෙරපුම් යන වග දක්වන්න.

2.



රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල සැහැල්ලු දඬු හතකින් සාදා ඇත. රාමුව A හිදී අචල ලක්ෂ්‍යයකට අසව් කර ඇත. B හි දී යොදන තිරස් P බලයක් මගින් රාමුව BD තිරස් වන සේ තබා ඇත.
බෝ අංකනය භාවිත යොදා ප්‍රත්‍යා බල සටහනක් ඇඳ එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබලය සොයා ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ලෙස හඳුනා ගනිමින් සොයන්න.

3.

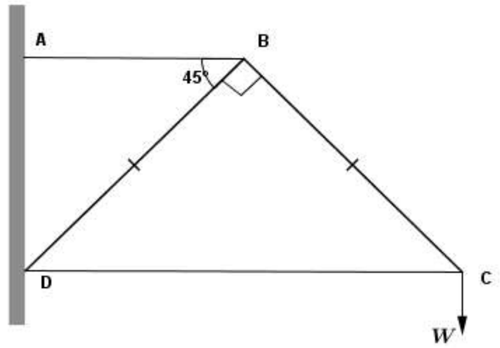


සැහැල්ලු දඬු නවයක් සුමට ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් මෙම රාමු සැකිල්ල සාදා ඇත. එය A හිදී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. B හිදී ක්‍රියා කරන තිරස් P බලයක් මගින් රාමුව සමතුලිතව තබා ඇත. C හා D හිදී 20 N බැගින් භාර යොදා ඇත.

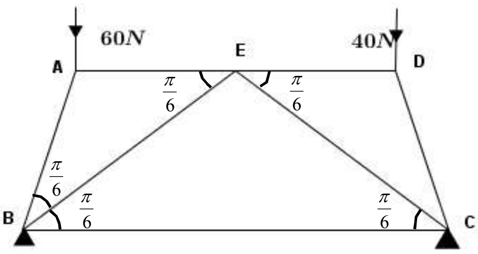
i. P හා A හි ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

ii. බෝ අංකනය භාවිතයෙන් ප්‍රත්‍යා බල සටහනක් අඳින්න. එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යා බලය සොයා ඒවා ආතති ද සම්පීඩන ද යන්න වෙන් කර දක්වන්න.

4. රාමුව සැහැල්ලු AB, BC, CD, DB දඬු හතරකින් සමන් විත වන අතර B, C හා D හිදී සුවලව සන්ධි කිරීමෙන් සාදා ඇත. A හා D හිදී සිරස් බිත්තියකට සවිකර ඇත. Cහිදී WN භාරයක් දරා සිටී. බෝ අංකනය භාවිත කර ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් අඳින්න. එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍ය බල සොයා ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන වග දක්වන්න.

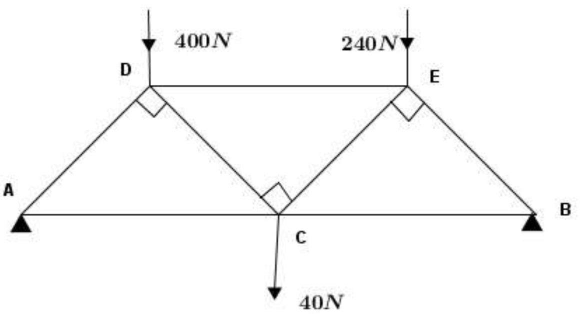


5.

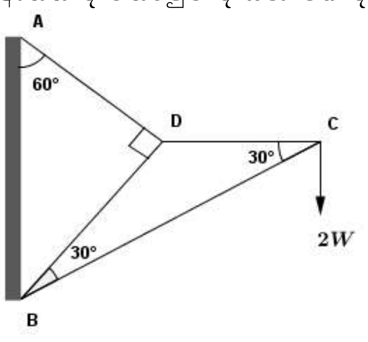


ABCDE රාමු සැකිල්ල AB, BC, CD, DE, AE, BE හා CE දඬු සුවල ලෙස සන්ධිකර ඇත්තේ $E\hat{B}C=E\hat{C}B=A\hat{B}E=D\hat{C}E=A\hat{E}B=D\hat{E}C=\frac{\pi}{6}$ වනසේය. රාමුව B හා C හි ආධාරකයක් මත තබා ඇත. BC තිරස් වන සේ 60 N, 40 N බර A හා D හිදී පිළිවෙළින් යොදා ඇත. බෝ අංකනය භාවිත කර ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් අඳින්න. එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍ය බල සොයා ආතති තෙරපුම් යන වගද දක්වන්න.

6. රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල සැහැල්ලු දඬු රූපයේ පරිදි සම්බන්ධ කිරීමෙන් ගොඩනගා ඇත. සියලු ම ත්‍රිකෝණ සමද්විපාද ඍජුකෝණී ඒවා වේ. පද්ධතිය A හා B හිදී වූ ආධාරක මත ACB තිරස් වන සේ තබා ඇත. රාමුව පිළිවෙළින් C, D හා Eහිදී 40 N, 400 N, 240 N භාර දරා සිටී. බෝ අංකනය භාවිත කර ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් ඇඳ දඬුවල ප්‍රත්‍ය බල සොයා ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන වග දක්වන්න.

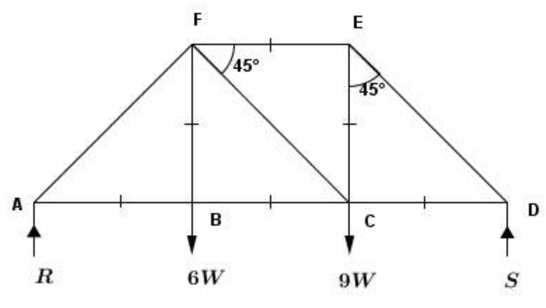


7.

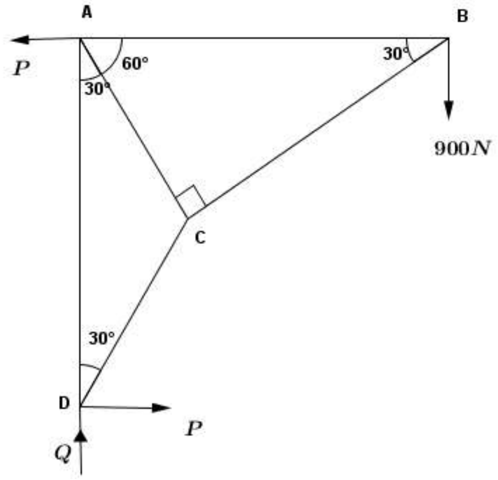


AD, BD, BC හා CDසැහැල්ලු දඬු හතරින් සමන්විත රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ලේ දඬු සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. එය A හා Bහිදී සිරස් බිත්තියකට අසවි කර C හිදී $2W$භාරයක් දරයි. ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් ඇසුරින් A හා Bහි ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. එනයින් දඬුවල ප්‍රත්‍ය බල සොයා ආතති තෙරපුම් වෙන් කර දක්වන්න.

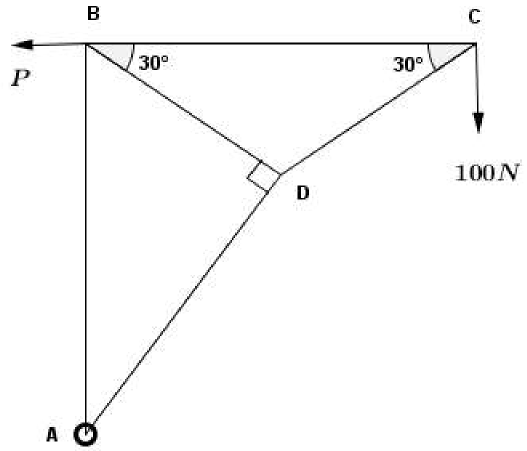
8. රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල සැහැල්ලු දඬු නවයක් A, B, C, D, E හා Fහිදී සුවල ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් සාදා ඇත. $6W$ හා $9W$ බර B හා C හිදී දරා සිටියි. A හා D හිදී R හා S සිරස් බල දෙකක් මගින් එය දරා සිටි ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් ඇද දඬුවල ප්‍රත්‍ය බල සොයා ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න සඳහන් කරන්න.



9. රූපයේ පෙන්වන රාමු සැකිල්ල සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත වන අතර ඒවා සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. B හිදී 900Nභාරයක් දරා සිටි. AD සිරස් වන සේ රාමු සැකිල්ල සමතුලිතතාව තබා ඇත්තේ A හා D හිදී P හා (P, Q) බල මගිනි. (P තිරස් හා Q සිරස් වේ.). P හා Q බලවල විශාලත්ව සොයන්න. බෝ අංකනය යොදා ගනිමින් ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් ඇඳ එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍ය බල සොයා ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න වෙන් කර දක්වන්න.



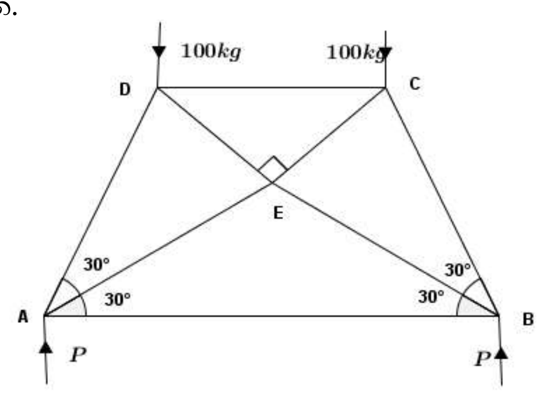
10.



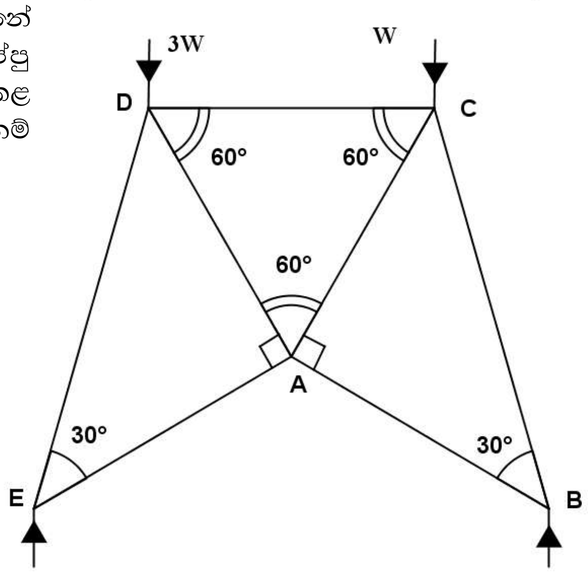
මෙම රූපයේ සැහැල්ලු දඬු පහක් සුවල සන්ධි කර රාමු සැකිල්ල ගොඩනගා ඇත. A සන්ධිය අචල ලක්ෂ්‍යකට සුවල ලෙස අසව් කිරීමෙන් රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත. AB සිරස් වේ BC තිරස් වේ. $A\hat{D}B = 90°$ හා $D\hat{B}C = D\hat{C}B = 30°$. 100 N භාරයක් C හිදී එල්ලා ඇති අතර P බලයක් B හිදී තිරස් CB දිශාවට ක්‍රියාකරයි.

P සොයා A අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් හා සිරස් සංරචක ලබා ගන්න. බෝ අංකනය යොදා ගනිමින් රාමු සැකිල්ල සඳහා ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් අඳින්න. එනයින් බල පහේ ප්‍රත්‍යබල නිර්ණය කර ආතති තෙරපුම් වෙන් කර දක්වන්න.

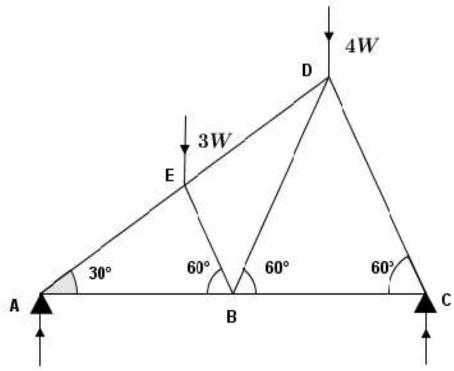
11. දෙන ලද රාමු සැකිල්ල සුවල ලෙස සන්ධි කළ සැහැල්ලු දඬු අටකින් සමන්විත වන අතර ඒවා A, B, C, D හා Eහිදී සන්ධි කර ඇත. A හා B සන්ධි එක එකක් සිරස් P ආධාරක දෙකක් මත තබා ඇත. රාමුව C හා Dලක්ෂ්‍යවලදී සමාන 100 kg භාර දෙකක් දරා සිටී. AB තිරස් වන අතර AE=BE=AD=BC වේ. Pහි අගය සොයන්න. CD හි x kg ප්‍රත්‍ය බලයක් ඇතැයි උපකල්පනය කරමින් රාමු සැකිල්ල සඳහා ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් අඳින්න. AB හි ආතතිය y kg නම් බල සටහනේ ජ්‍යාමිතිය භාවිතයෙන් $y = 100-(\sqrt{3}-1)x$ බව ඔප්පු කරන්න. x හා y හි සපිරි අගයන් එකවිට ගණනය කළ නොහැක්කේ ඇයි දැයි පැහැදිලි කරන්න. $x = y$ නම් සෑම දණ්ඩකම ප්‍රත්‍ය බලය සොයන්න.

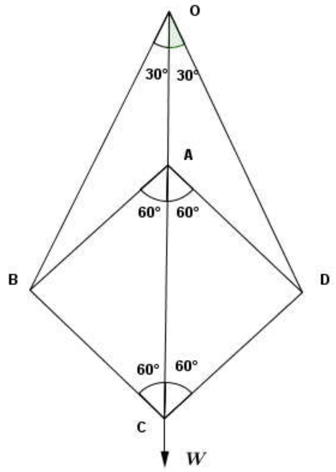


12. රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල සැහැල්ලු දඬු හතකින් ගොඩනගා ඇත. A, B, C, D, E අන්ත සුවලව සන්ධිකර ඇත. මෙම රාමුව W හා $2W$ භාරය C හා D සන්ධිවලදී පිළිවෙළින් දරයි. B හා E තිරස් වන සේ B හා E ආධාරක මත තබා ඇත. බෝ අංකනය යොදා ගනිමින් ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් ඇද සෑම දණ්ඩකම ප්‍රත්‍ය බල සොයන්න. ආතති හා තෙරපුම් වෙන්කර දක්වන්න.



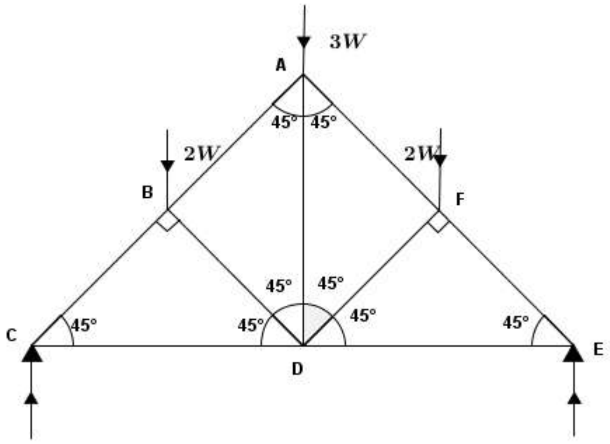
13. සැහැල්ලු දඬු හතක් සුවල ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් රාමු සැකිල්ල සාදා ඇත. එය A හා C හිදී ආධාරක දෙකක් මත තබා ඇති අතර $4W$ හා W භාර D හා E හිදී පිළිවෙළින් දරා සිටී. A හා Cහි ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. සෑම දණ්ඩකම ප්‍රත්‍යාබල සෙවීමට ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් භාවිත කරන්න. ඒවා ආතතිද තෙරපුම්ද යන වග දක්වන්න.

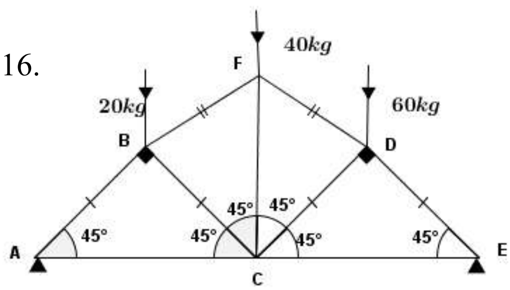


14. 

සැහැල්ලු දඬු පහක් සුවල ලෙස සන්ධි කර රොම්බසයක හැඩයට දෙන ලද රාමු සැකිල්ල සකස් කර ඇත. OB, OD, සමාන තන්තු දෙකක් මගින් රාමුව O වලින් එල්ලා ඇත. OA සිරස් දණ්ඩ සුවල ලෙස A හිදී සම්බන්ධ කර ඇත. AC විකර්ණය සිරස් වේ. $A\hat{B}C = B\hat{O}D = 60°$. C ලක්ෂ්‍ය W භාරයක් දරන විට දී එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබලය සොයන්න. ප්‍රත්‍යාබල සටහන භාවිතයෙන් තන්තුවල ආතති සොයන්න. ආතතිවලට ලක්ව ඇති දඬු නම් කරන්න.

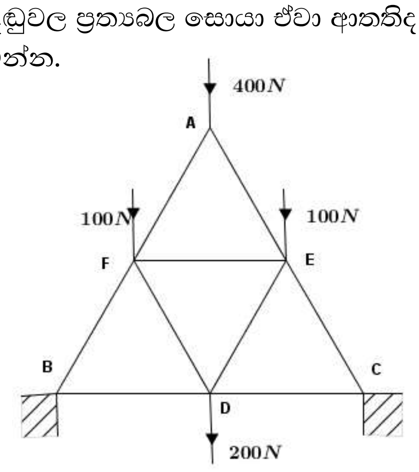
15. සැහැල්ලු දඬු සුවල ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල ගොඩනගා ඇත. DA සිරස් වේ. C හා E හිදී වූ ආධාරක මත රාමුව සමතුලිතතාවයේ පවතී. $3W$, $2W$ හා $2W$ භාර A, B හා Fසන්ධිවලින් දරා සිටී C හා Eහි ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. බෝ අංකනය භාවිත කරමින් ප්‍රත්‍ය බල සටනක් ඇද එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබලය සොයන්න. ආතති හා තෙරපුම් හඳුන්වන්න.



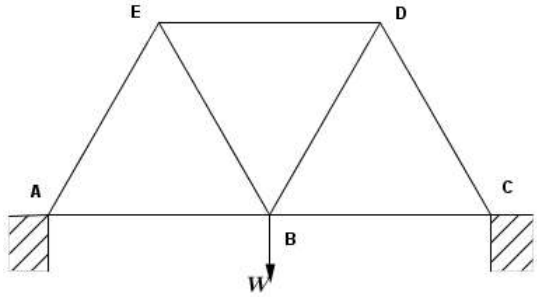
16. 

දෙන ලද රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල සැහැල්ලු දඬුවලින් සෑදී ඇති අතර B, F, D හි භාර රූපයේ දැක්වේ. AC හා CE දඬු එක එකක් 10 m වන අතර ඒවා තිරස් වේ. CF = 8 m. එසේම AB = BC = CD = DE දඬු දිගින් සමානවේ. BF = FD රාමුව A හා Eහි සුමට නා දැති දෙකක් මත තබා ඇත. A හා E හි ප්‍රතික්‍රියා ඒවා සිරස් වේ යයි උපකල්පනය කරමින් සොයන්න. ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් ඇද දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල සොයා ඒවා ආතතිද තෙරපුම් ද යන වග දක්වන්න.

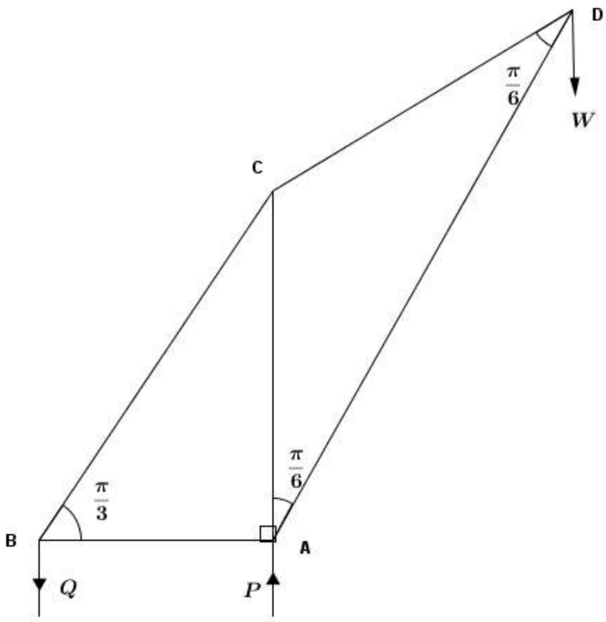
17. දෙන ලද රාමු සැකිල්ල සමාන සැහැල්ලු දඬු නමයකින් ගොඩ නගා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට භාර දරා සිටී. රාමුව B හා C ආධාරක මත පද්ධතිය සිරස් තලයක නිසලව තිබේ. B හා Cහි ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. බෝ අංකනය යොදා ගනිමින් ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් අදින්න. එනයින් එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබලය සොයා ඒවා ආතති ද තෙරපුම්ද යන වග දක්වන්න.



18. ABCDE පාලම් රාමු සැකිල්ල සමාන සැහැල්ලු දඬු හතක් ඇසුරින් රූපයේ පරිදි සාදා ඇත. A හා C සන්ධි ආධාරක මතවේ. ඒවා එකම තිරස්ව මට්ටමේ පිහිටයි. B හිදී W භාරයක් දරමින් රාමුව සිරස් තලයක වේ. බෝ අංකනය භාවිත කරමින් ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් අදින්න. එනයින් එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍ය බලය සොයා ආතති හා තෙරපුම් වෙන් කර දක්වන්න.



19.

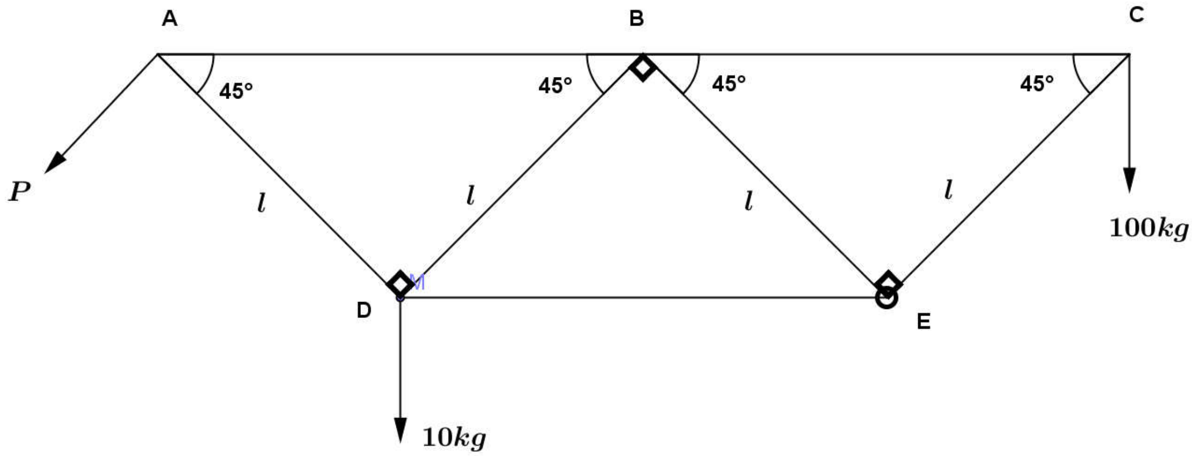


AB, BC, CA, CD හා DA සැහැල්ලු දඬු ඒවායේ කෙළවරදී සුවල ලෙස සන්ධි කර රාමු සැකිල්ල සාදා ඇත. එය AB තිරස් වන සේත් AC සිරස් වනසේත් සිරස් තලයක තබා ඇත. $AB = a$, $B\hat{C}D = B\hat{A}D = \frac{2\pi}{3}$ හා $A\hat{B}C = \frac{\pi}{3}$ වේ. W භාරයක් D හිදී දරා සිටී. A හා B හි පිළිවෙළින් P හා Q සිරස් බල දෙකක් මගින් රාමුවේ සමතුලිතතාව පවත්වා ගනී

(i) P හා Q වල අගයෙන් W පදවලින් සොයන්න.

(ii) මෙම රාමු සැකිල්ල සඳහා ප්‍රත්‍යබල සටහනක් බෝ අංකනය ඇසුරන් අඳින්න. එනයින් දඬු පහේ ප්‍රත්‍යබල සොයා ආතති හා තෙරපුම් හඳුන්වා දෙන්න.

20.



ඉහත රාමු සැකිල්ල AB, BC, AD, BD, BE, CE හා DE සැහැල්ලු දඬු හතෙන් සාදා ඇත. $AD = BD = BE = CE = \ell$ වේ. රාමුව E හිදී අසව් කර A හිදී P බලයක් හා පිළිවෙළින් C හා D හිදී 100 kg හා 10 kg භාර යොදා රාමුව සමතුලිතව තබා ඇත.

(i) E හි ප්‍රතික්‍රියාවේ සිරස් හා තිරස් සංරචක සොයන්න.

(ii) P හි අගය සොයන්න.

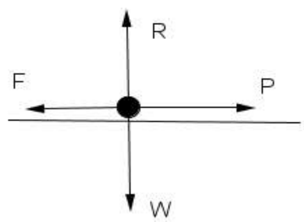
(iii) බෝ අංකනය යොදා ගනිමින් ප්‍රත්‍ය බල සටහනක් අදින්න. එනයින් එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍ය බල සොයා ආතති හා තෙරපුම් වෙන්කර දක්වන්න.

7.0 ඝර්ෂණය

7.1 හැඳින්වීම

වස්තු දෙකක් එකිනෙකට ගැටී පවතින විට එම ගැටී ඇති ලක්ෂ්‍යයේ දී පෘෂ්ඨය ඔස්සේ වස්තු දෙක ලිස්සායාම වළක්වන ලෙස ක්‍රියාකරනු ලබන බලය ඝර්ෂණ බලය ලෙස හැඳින්වේ. එම වස්තු දෙක මත ක්‍රියාකරන ඝර්ෂණ බලය විශාලත්වයෙන් සමාන වන අතර දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ වෙයි.

වස්තුවක් මත තිරස් P බලයක් යෙදූ විට එම අවස්ථාවේදී එම වස්තුව චලිත නොවන්නේ නම් එයින් හැඟවෙන්නේ එම අවස්ථාවේදී එම බලය මැඩලීමට තරම් විශාලත්වයෙන් සමාන දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ වූ බලයක් ක්‍රියාත්මක වීමයි. එම ප්‍රතිවිරුද්ධ බලය ඝර්ෂණ බලය ලෙස හැඳින්වෙන අතර එම බලය Fමගින් දක් වූ විට F = P වේ.



වස්තුව මත යොදන බාහිර බලය ක්‍රමයෙන් වර්ධනය කරන විට යම් අවස්ථාවකදී වස්තුව චලිත වීමට පටන් ගනී. මෙයින් හැඟවෙන්නේ ඝර්ෂණ බලයට යම් කිසි සීමාකාරී බලයකට වඩා වැඩිවිය නොහැකි බවයි. එම අවස්ථාවේදී වස්තුව මත ක්‍රියාකරන ඝර්ෂණ බලය සීමාකාරී ඝර්ෂණ බලය ලෙස හැඳින්වේ.

සීමාකාරි සමතුලිත අවස්ථාවේදී,

ඝර්ෂණ සංගුණකය $= \dfrac{\text{සීමාකාරී ඝර්ෂණ බලය}}{\text{අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව}} = \mu$, මෙහි μ සීමාකාරී ඝර්ෂණ සංගුණකය ලෙස හැඳින්වේ. සීමාකාරී අවස්ථාවේ නැති විට $\dfrac{F}{R} < \mu$

සීමාකාරී සමතුලිත අවස්ථාවේදී $\dfrac{F_L}{R} = \mu$. (මෙහි F_L - සීමාකාරී ඝර්ෂණ බලය)

7.2 ඝර්ෂණ නියම

1. වස්තු දෙකක් ගැටී ඇති විට එම වස්තු මත ක්‍රියාකරන ඝර්ෂණ බලයේ ගැටී ඇති ලක්ෂ්‍යයේදී එම වස්තු ලිස්සායාමට තැත් කරන දිශාවට ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවට ක්‍රියාකරයි.
2. යම් කිසි වස්තු දෙකක් එකිනෙක ස්පර්ශව සමතුලිතතාවයේ ඇති විට එම වස්තුමත ක්‍රියාකරන ඝර්ෂණ බලයේ විශාලත්වය එම වස්තු ලිස්සායාම වැළැක්වීමට ප්‍රමාණවත් වේ.
3. සීමාකාරී ඝර්ෂණ බලය අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාවට දක්වන අනුපාතය ඝර්ෂණ සංගුණකය ලෙස හැඳින්වේ. මෙය වස්තූන් සාදා ඇති ද්‍රව්‍යයේ ස්වභාවය මත රදා පවතී.
4. වස්තුව මත ක්‍රියාකරන අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව නොවෙනස් වන්නේ නම් සීමාකාරි ඝර්ෂණ බලය පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය හා හැඩය මත රඳා නොපවතී.
5. වස්තුව චලිත වන විට වස්තුව මත ක්‍රියාකරන ඝර්ෂණ බලයේ දිශාව වස්තුව චලිත වන දිශාවට ප්‍රතිවිරුද්ධ වේ. චලිත වන අවස්ථාවේදී වස්තු මත ක්‍රියාකරන ඝර්ෂණ බලය සීමාකාරි ඝර්ෂණ බලය වඩා ස්වල්ප ප්‍රමාණයකින් අඩුය.
6. චලිත වන වස්තුව මත ක්‍රියාකරන ඝර්ෂණ බලය වස්තුවේ ප්‍රවේගය මත රඳා නොපවතී.

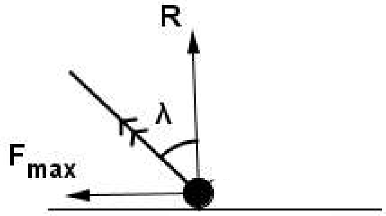
සර්ෂණ කෝණය

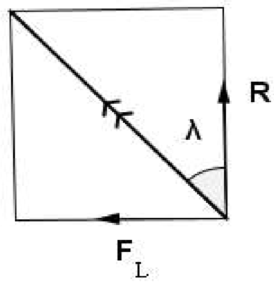
වස්තු දෙකක් එකිනෙක ස්පර්ශව සීමාකාරී සමතුලිතතාවේ පවතින විට ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇති වන සම්ප්‍රයුක්ත ප්‍රතික්‍රියාව (එනම් අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාවේ හා සර්ෂණ බලයේ සම්ප්‍රයුක්තය) හා අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව් අතර කෝණය λ සර්ෂණ කෝණය ලෙස හැඳින්වේ.

$$\tan\lambda = \frac{F_L}{R}$$

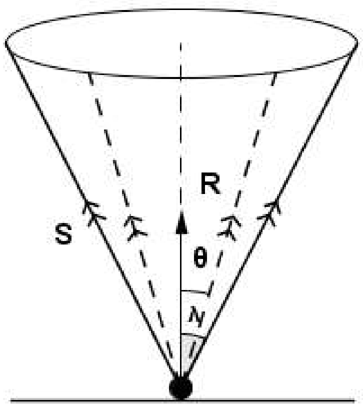
$$\frac{F_L}{R} = \mu$$

$$\tan\lambda = \mu$$





සර්ෂණ කේතුව



වස්තුවක් රලු පෘෂ්ඨයක් හා ස්පර්ශව පවත්නා සීමාකාරී සමතුලිතතාවේ විට ස්පර් ලක්ෂ්‍යයේදී පොදු අභිලම්භය කේතු වේ. අක්ෂ්‍යය වන අඩ සිරස් කෝණය λ වන

ඍජු වෘත්ත කේතුව සලකමු. මෙම කේතුව සර්ෂණ කේතුව ලෙස අර්ථ දක්වනු ලැබේ. වස්තුව කුමන දිශාවකට චලනය වීමට යන්ත දැරුවද සම්ප්‍රයුක්ත ප්‍රතික්‍රියාව කේතුවේ පෘෂ්ඨය මත හෝ තුළ හෝ පිහිටිය යුතුයි.

- **රළු තිරස් තලයක් මත ඇති අංශුවක් මත බාහිර බලයක් ක්‍රියාකරන විට අංශුවේ සමතුලිතතාවය**

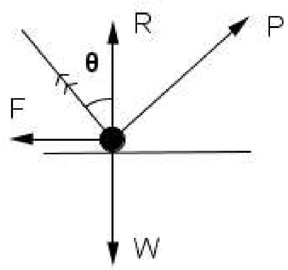
$$\frac{F}{R} = \tan\theta$$

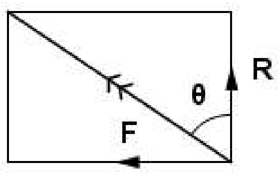
$$\frac{F}{R} \le \mu$$

$$\tan\theta \le \mu$$

$$\tan\theta \le \tan\lambda$$

$$\theta \le \lambda$$





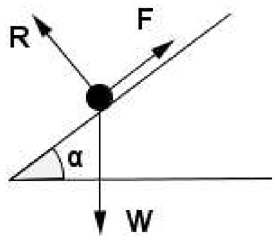
- **රළු ආනත තලයක් මත ඇති අංශුවක සමතුලිතතාවය**

තලයට සමාන්තරව බල විභේදනයෙන්

$$\nearrow \quad F - W\sin\alpha = 0 \;;\; F = W\sin\alpha$$

තලයට ලම්භකව බල විභේදනයෙන්

$$\nwarrow \quad R - W\cos\alpha = 0 \;;\; R = W\cos\alpha$$



සමතුලිතතාව සඳහා $$\frac{F}{R} \leq \mu$$

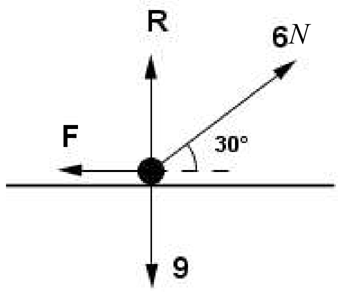
$$\frac{W \sin \alpha}{W \cos \alpha} \leq \tan \lambda$$

$$\tan \alpha \leq \tan \lambda$$

$$\alpha \leq \lambda$$

උදාහරණය 1

9 N ක් බරැති වස්තුවක් රලු ආනත තලයක් මත තබා තිරසට 30° ක කෝණයකින් ආනත තන්තුවක් මගින් අදිනු ලැබේ. තන්තුවේ ආතතිය 6 N වන විට එය චලනය වීමට පටන් ගනී නම් වස්තුව හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය සොයන්න.



තිරසට විභේදනයෙන්

$$\rightarrow \quad 6 \cos 30 - F = 0 \quad ; \quad F = 3\sqrt{3}N$$

සිරසට විභේදනයෙන්

$$\uparrow \quad R + 6 \sin 30^\circ - 9 = 0$$

$$R = 6N$$

සීමාකාරී සමතුලිතතාවය සඳහා

$$\mu = \frac{F}{R} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

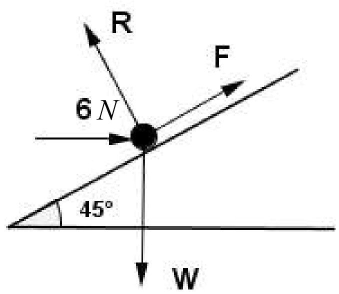
උදාහරණය 2

තිරසට 45° කින් ආනත තලයක් මත වස්තුවක් තබා ඇත. තලය සහ වස්තුව අතර ඝර්ෂණ $\frac{1}{3}$ කි. වස්තුව තලය පහළට ලිස්සා යාම වැළැක්වීමට 6 N තිරස් බලයක් අවශ්‍ය වේ.

(a) වස්තුවේ බර සොයන්න.

(b) තිරස් බලයේ විශාලත්වය ක්‍රමක්‍රමයෙන් වැඩි කරන විට වස්තුව තලය ඉහළට චලනය වීමට ආරම්භ කරයි නම් එම අවස්ථාවේදී එම බලයේ අගය සොයන්න.

(a) $\mu = \frac{1}{3}$



තලයට සමාන්තරව බල විභේදනයෙන්

$$\nearrow \quad F + 6 \cos 45^\circ - W \sin 45^\circ = 0 \quad ; \quad F = \frac{W - 6}{\sqrt{2}}$$

තලයට ලම්බකව බල විභේදනයෙන්

$$\nwarrow \quad R - 6 \sin 45^\circ - W \cos 45^\circ = 0 \quad ; \quad R = \frac{W + 6}{\sqrt{2}}$$

සීමාකාරී සමතුලිතතාවය සඳහා

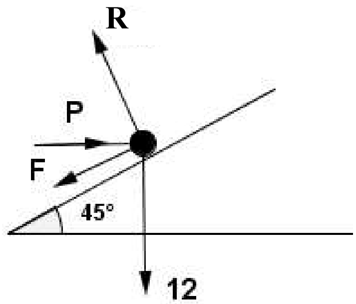
$$\frac{F}{R} = \mu \quad ; \quad \frac{\frac{W - 6}{\sqrt{2}}}{\frac{W + 6}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{W - 6}{W + 6} = \frac{1}{3} \quad ; \quad W = 12 \text{ N}$$

(b)

තලයට සමාන්තරව බල විභේදනයෙන්

$$\swarrow \quad F - P\cos 45^\circ + 12\sin 45^\circ = 0 \quad ; \quad F = \frac{P - 12}{\sqrt{2}}$$



තලයට ලම්භකව බල විභේදනයෙන්

$$\nwarrow \quad R - P\sin 45^\circ - 12\cos 45^\circ = 0 \quad ; \quad R = \frac{P + 12}{\sqrt{2}}$$

සීමාකාරී සමතුලිත අවස්ථාවේදී

$$\frac{F}{R} = \mu$$

$$\frac{\frac{P - 12}{\sqrt{2}}}{\frac{P + 12}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{P - 12}{P + 12} = \frac{1}{3} \quad ; \quad P = 24 \text{ N}$$

රළු තලයක් මත අංශුවක් චලනය කිරීමට

අංශුවේ බර W ලෙස ද ඝර්ෂන කෝණය λ ලෙස ද ගනිමු.

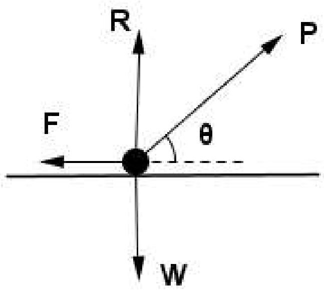
අංශුව මත ක්‍රියාකරන බල

(a) බර W

(b) ඝර්ෂණ බලය F

(c) අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව R

(d) තිරස සමග θ කෝණයකින් ක්‍රියාකරන අවශ්‍ය P බලය



අංශුවේ සමතුලිතතාවය සඳහා

තිරසට බල විභේදනයෙන්

$$\rightarrow \quad P\cos\theta - F = 0 \quad ; \quad F = P\cos\theta$$

සිරසට බල විභේදනයෙන්

$$\uparrow \quad R + P\sin\theta - W = 0 \quad ; \quad R = W - P\sin\theta$$

සීමාකාරී සමතුලතතාවය සඳහා

$$\frac{F}{R} = \mu = \tan\lambda$$

$$\frac{P\cos\theta}{W - P\sin\theta} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$P(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda) = W\sin\lambda$$

$$P\cos(\theta - \lambda) = W\sin\lambda$$

$$P = \frac{W\sin\lambda}{\cos(\theta-\lambda)}$$

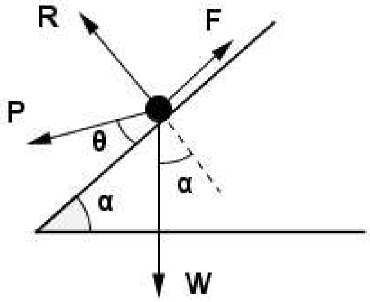
P අවම වීමට $\cos(\theta - \lambda) = 1$.   එවිට $\theta = \lambda$

$\theta = \lambda$ හා $P_{අවම} = W\sin\lambda$

- **තලයේ ආනතිය ඝර්ෂණ කෝණයට වඩා අඩුවිට, තලය පහළට අංශුව චලනය කිරීමට අවශ්‍ය අඩුම බලය**

තලයේ තිරසට ආනතිය α ලෙස ගනිමු. $\alpha < \lambda$, නිසා අංශුව සමතුලිතතාවයේ පවතී.

ආනත තලය සමග θ කෝණයක් ආනතව P බලයක් යොදමු.



අංශුවේ සමතුලිතතාවය සඳහා

තලයට සමාන්තරව බල විභේදනයෙන්

$$\swarrow \; P\cos\theta + W\sin\alpha - F = 0$$

තලයට ලම්භකව බල විභේදනයෙන්

$$\nwarrow \; R - W\cos\alpha + P\sin\theta = 0$$

සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ දී

$$\frac{F}{R} = \mu = \tan\lambda$$

$$\frac{P\cos\theta + W\sin\alpha}{W\cos\alpha - P\sin\theta} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$P(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda) = W(\sin\lambda\cos\alpha - \cos\lambda\sin\alpha)$$

$$P\cos(\theta - \lambda) = W\sin(\lambda - \alpha)$$

$$P = \frac{W\sin(\lambda - \alpha)}{\cos(\theta - \lambda)}$$

P අවම වීමට $\cos(\theta - \lambda) = 1$;

එනම් $\theta = \lambda$ හා P හි අවම අගය $= W\sin(\lambda - \alpha)$

- **තලයේ ආනතිය ඝර්ෂණ කෝණයට වඩා අඩුවිට තලය ඉහළට අංශුව චලනය කිරීමට අවශ්‍ය අඩුම බලය**

තලයේ ආනතිය α. ලෙස ගනිමු. $\alpha < \lambda$ නිසාම අශුව සමතුලිතතාවයේ පවතී.

තලය සමග θ කෝණයකින් ආනතව අංශුව මත යොදන බලය P යයි ගනිමු.

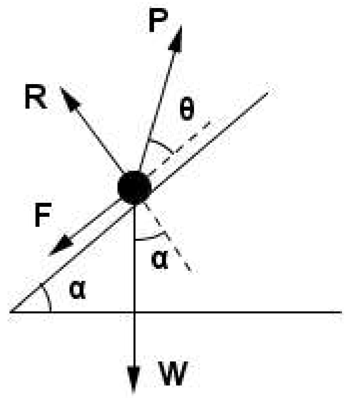
සමතුලිතතාවය සඳහා

තලයට සමාන්තරව බල විභේදනයෙන්

$$\nearrow P\cos\theta - F - W\sin\alpha = 0$$

තලයට ලම්භකව බල විභේදනයෙන්

$$\nwarrow R + P\sin\theta - W\cos\alpha = 0$$



සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේදී

$$\frac{F}{R} = \mu = \tan\lambda$$

$$\frac{P\cos\theta - W\sin\alpha}{W\cos\alpha - P\sin\theta} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$P(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda) = W(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda)$$

$$P\cos(\theta - \lambda) = W\sin(\alpha + \lambda)$$

$$P = \frac{W\sin(\alpha + \lambda)}{\cos(\theta - \lambda)}$$

P අවම වීමට $\cos(\theta - \lambda) = 1$;

i.e. $\theta = \lambda$ P හි අවම අගය $= W\sin(\alpha + \lambda)$

- **තලයේ ආනතිය ඝර්ෂණ කෝණයට වඩා වැඩිවන විට අංශුව තලය දිගේ ඉහළට චලනය කිරීමට අවශ්‍ය අවම බලය**

$\alpha > \lambda$ බැවින් අංශුව තලය දිගේ පහළට රූටයි

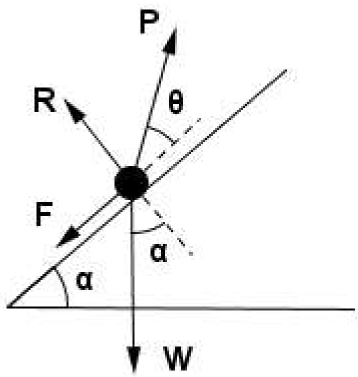
සමතුලිතතාවය සඳහා

තලය දිගේ විභේදනයෙන්

$$\nearrow P\cos\theta - F - W\sin\alpha = 0$$

තලයට ලම්භකව විභේදනයෙන්

$$\nwarrow R + P\sin\theta - W\cos\alpha = 0$$



සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේදී

$$\frac{F}{R} = \mu = \tan\lambda$$

$$\frac{P\cos\theta - W\sin\alpha}{W\cos\alpha - P\sin\theta} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$P(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda) = W(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda)$$

$$P\cos(\theta - \lambda) = W\sin(\alpha + \lambda)$$

$$P = \frac{W\sin(\alpha + \lambda)}{\cos(\theta - \lambda)}$$

P අවම වීමට $\cos(\theta - \lambda) = 1$;

එනම් $\theta = \lambda$ හා P හි අවම අගය $= W\sin(\alpha + \lambda)$

- **තලයේ ආනතිය ඝර්ෂණ කෝණයට වඩා වැඩිවන විට අංශු රඳවා ගැනීමට අවශ්‍ය අවම බලය**

තලයේ තිරසට ආනතිය α ලෙස ගනිමු. $\alpha > \lambda$ බැවින් අංශුව තලය දිගේ පහළට රූටයි. අවම ආධාරය සෙවිය යුතුය. අංශුව තලය දිගේ පහළට චලනය වේ. එම නිසා ඝර්ෂණ බලය තලයේ ඉහළට ක්‍රියාකරයි.

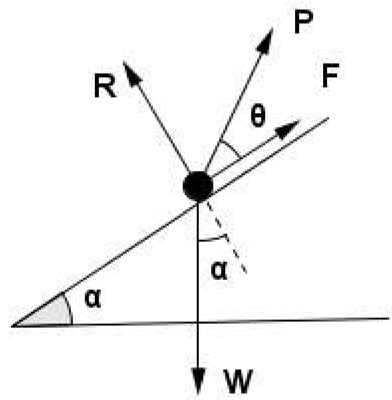
අංශුවේ සමතුලිතතාවය සඳහා

තලය දිගේ විභේදනයෙන්

$\nearrow F + P\cos\theta - W\sin\alpha = 0$

ලම්භකව තලයට ලම්භකව විභේදනයෙන්

$\nwarrow R + P\sin\theta - W\cos\alpha = 0$



සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේදී

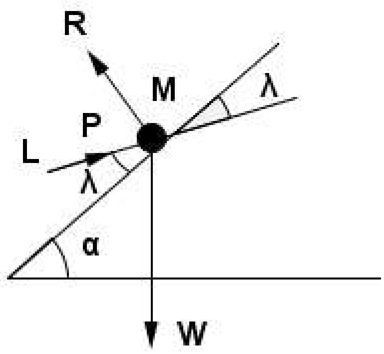
$$\frac{F}{R} = \mu = \tan\lambda$$

$$\frac{W\sin\alpha - P\cos\theta}{P\cos\alpha - W\sin\theta} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$W(\sin\alpha\cos\lambda - \cos\alpha\sin\lambda) = P(\cos\theta\cos\lambda - \sin\theta\sin\lambda)$$

$$P\cos(\theta+\lambda) = W\sin(\alpha-\lambda)$$

$$P = \frac{W\sin(\alpha-\lambda)}{\cos(\theta+\lambda)}$$



P අවම වීමට $\cos(\theta+\lambda) = 1$;

එනම් $\theta = -\lambda$ හා P හි අවම අගය $= W\sin(\alpha-\lambda)$

$\theta = -\lambda$ යන්නෙන් අදහස් වන්නේ

P හි අවම අගය $W\sin(\alpha-\lambda)$ වේ.

රළු තලයක් මත දෘඪ වස්තුවක සමතුලිතතාවය

උදාහරණය 3

දිග $2a$ වන බර W වන ඒකාකාර දණ්ඩක් එක කෙළවරක් සුමට බිත්තියකට හේත්තු කර අනෙක් කෙළවර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වන රළු තිරස් පොළොව මත ද වන සේ තබා ඇත. දණ්ඩ ලිස්සන මොහොතේ ඇත්නම් තිරසට දණ්ඩේ ආනතිය $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\cot\lambda\right)$ බව පෙන්වා බිත්තය මඟින් දණ්ඩ මත හා පොළව මඟින් දණ්ඩ මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. මෙහි λ යනු ඝර්ෂණ කෙ

ක්‍රමය I

දණ්ඩ තිරසට ආනතිය θ ලෙස ගනිමු.

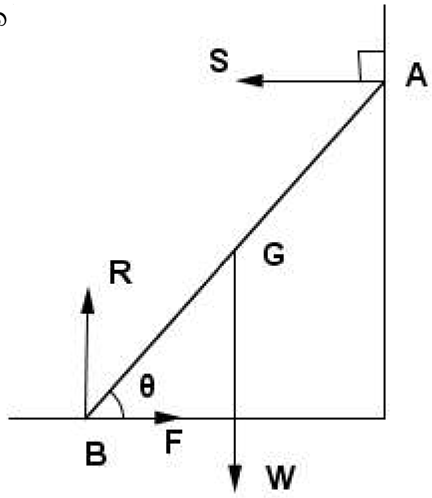
AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා

තිරසට බල විභේදනයෙන්

$\rightarrow F - S = 0$; $F = S$ ------- ①

සිරසට බල විභේදනයෙන්

$\uparrow R - W = 0$; $R = W$ -------- ②



B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\text{B}\circlearrowleft = 0, \qquad S.2a \sin\theta - Wa\cos\theta = 0$$

$$S = \frac{W}{2}\cot\theta \quad \text{---------} ③$$

$$① \text{ හා } ③,\ F = S = \frac{W}{2}\cot\theta$$

සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේදී

$$\frac{F}{R} = \mu$$

$$\frac{W\cot\theta}{2}\times\frac{1}{W} = \tan\lambda$$

$$\cot\theta = 2\tan\lambda$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2}\cot\lambda$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\cot\lambda\right)$$

$$S = \frac{W}{2}.2\tan\lambda$$

$$S = W\tan\lambda$$

$$F = W\tan\lambda$$

බිත්තිය මගින් දණ්ඩමත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව $S = W\tan\lambda$

පොළොව මගින් දණ්ඩමත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව $= \sqrt{F^2 + R^2}$

$$= \sqrt{(W\tan\lambda)^2 + W^2}$$

$$= W\sqrt{\tan^2\lambda + 1}$$

$$= W\sec\lambda$$

ක්‍රමය II

A හි ප්‍රතික්‍රියාව S සහ දණ්ඩේ බර W , Oහිදී හමුවේ.

AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා F හා R හි සම්ප්‍රයුක්ත ප්‍රතික්‍රියාව R' Oහරහා යයි.

දණ්ඩ සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ පවතින බැවින් R සහ R´ අතර කෝණය λ වේ. (ඝර්ෂණ කෝණය)

AOB ත්‍රිකෝණයට cot ප්‍රමේය යෙදීමෙන්

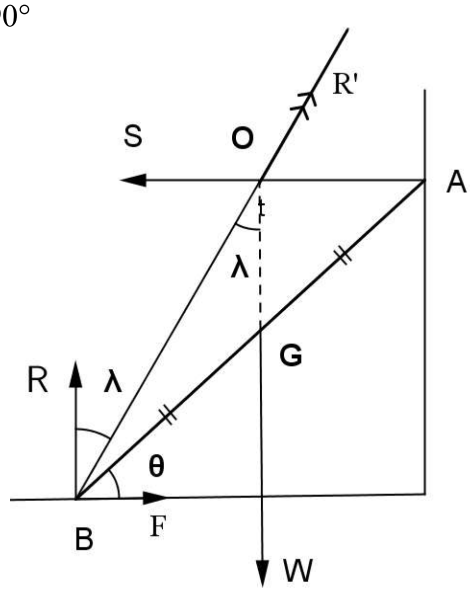
$$(BG + GA)\ \cot(90° - \theta) = BG\ \cot\lambda - GA\ \cot 90°$$

$$(a + a)\ \tan\theta = a\ \cot\lambda$$

$$2\ \tan\theta = \cot\lambda$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2}\cot\lambda$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\cot\lambda\right)$$



බිත්තියේ ඇති වන ප්‍රතික්‍රියාව $S = F = \frac{W}{2}\cot\theta \quad$ (③හි)

$$= W\ \tan\lambda$$

පොළොවෙන් ඇති වන සම්ප්‍රයුක්ත ප්‍රතික්‍රියාව $= \sqrt{F^2 + R^2}$

$$= \sqrt{(W\tan\lambda)^2 + W^2}$$

$$= \sqrt{W^2(1 + \tan^2\lambda)}$$

$$= W\sec\lambda$$

7.3 විසඳූ නිදසුන්

උදාහරණය 4

ඒකාකාර දණ්ඩක් රළු තිරස් තලයක හා රළු සිරස් බිත්තියක ගැටීමෙන් සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ ඇත. දණ්ඩ හා සිරස් බිත්තිය අතර ද දණ්ඩ හා තරස් තලය අතර ද ඝර්ෂණ සංගුණක පිළිවෙළින් μ_1 හා μ_2 වේ.

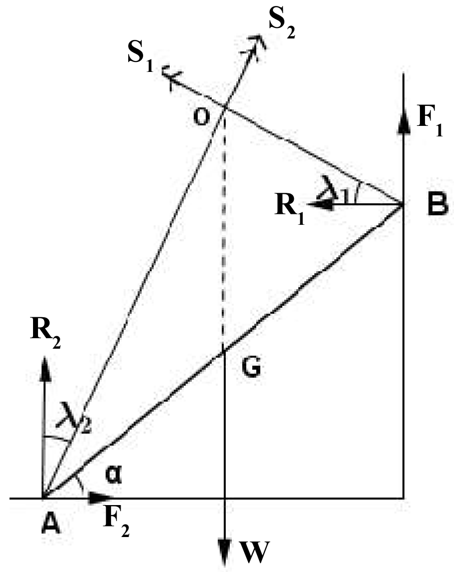
දණ්ඩ හරහා යන සිරස් තලය බිත්තියට ලම්භක නම් දණ්ඩ තිරස සමග සාදන කෝණය $\tan^{-1}\left(\dfrac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(i) F_1 හා R_1ගේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය S_1 වේ.

(ii) F_2 හා R_2 ගේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය S_2 වේ.

(iii) දණ්ඩේ බර W වේ.

දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා S_1, S_2 සහ W බල O ලක්ෂ්‍යයේ එකිනෙක හමවේ.



$\mu_1 = \tan\lambda_1$ හා $\mu_2 = \tan\lambda_2$ ලෙස ගනිමු

λ_1 යනු S_1 හා R_1 අතර කෝණයද

λ_2 යනු S_2 හා R_2 අතර කෝණයද වේ

AOB ත්‍රිකෝණයට කොට් ප්‍රමේයෙන්

$$(AG + GB)\cot(90° - \alpha) = AG\cot\lambda_2 - GB\cot(90° - \lambda_1)$$

$$(1+1)\tan\alpha = \frac{1}{\tan\lambda_2} - \tan\lambda_1$$

$$2\tan\alpha = \frac{1 - \tan\lambda_1\tan\lambda_2}{\tan\lambda_2}$$

$$\tan\alpha = \frac{1 - \tan\lambda_1\tan\lambda_2}{2\tan\lambda_2}$$

$$\tan\alpha = \left(\frac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_2}\right)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_2}\right)$$

උදාහරණ 5

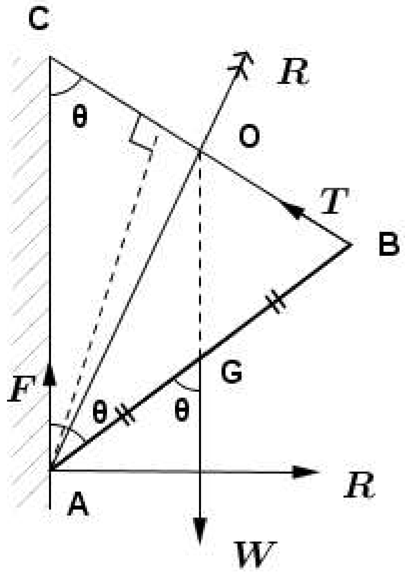
දිග $2a$ බර W වන ඒකාකාර AB දණ්ඩක් සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ දණ්ඩ A කෙළවර රළු සිරස් බිත්තයක ගැටෙමින්ද දණ්ඩේ අනෙක් B කෙළවර අප්‍රත්‍යස්ථ දිග $2a$ වන තන්තුවක එක් කෙළවරකට ගැට ගසා එම තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර Aට සිරස් ලෙස ඉහළින් පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයට සම්බන්ධ කිරීමෙනි. දණ්ඩ හරහා යන සිරස් තලය බිත්තියට ලම්භක වේ. දණ්ඩ උඩු සිරස සමග සාදන කෝණය θ නම් තන්තුවේ ආතතිය ද $\theta \geq \cot^{-1}\left(\dfrac{\mu}{3}\right)$ බවද පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු බිත්තිය හා දණ්ඩ අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.

B හිදී තන්තුවේ ආතතිය ද T ද දණ්ඩ බර Wද Oහිදී එකිනෙක හමුවේ.

දණ්ඩේ සමතුලිතාවය සඳහා A හි ක්‍රියාකරන R හා F හි සම්ප්‍රයුක්ත බලය R^1 O හරහා ගමන් කළ යුතුය

$C\hat{A}B = \theta$, since $BA = BC$, $B\hat{A}C = B\hat{C}A = \theta$

$\therefore\ A\hat{B}C = 180 - 2\theta$



ABදණ්ඩේ සමතුලිතාවයට

$$A\text{m} = 0$$

$$T.\,AB \sin(180° - 2\theta) - W.AG \sin\theta = 0$$

$$T.2a \sin 2\theta = W.a \sin\theta$$

$$T = \frac{W}{4\cos\theta}$$

$$= \frac{W \sec\theta}{4}$$

AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා

බල තිරස්ව විභේදනය කිරීමෙන්

$$\rightarrow R - T\cos(90° - \theta) = 0$$

$$R = T\sin\theta = \frac{W \tan\theta}{4}$$

බල සිරස්ව විභේදනය කිරීමෙන්

$$\uparrow\ T\cos\theta + F - W = 0$$

$$F = W - T\cos\theta$$

$$= W - \frac{W}{4} = \frac{3W}{4}$$

දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා

$$\frac{F}{R} \le \mu$$

$$\frac{3W}{4} \times \frac{4}{W\tan\theta} \le \mu$$

$$3\cot\theta \le \mu$$

$$\cot\theta \le \frac{\mu}{3}$$

$$\theta \ge \cot^{-1}\left(\frac{\mu}{3}\right)$$

උදාහරණය 6

ඉනිමගක එක් කෙළවරක් රළු තිරස් තලයක් මත ගැටෙමින් ද ඉනිමග මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යක් රළු අක්ෂ තිරස් වන සේ පොළොවට අචලව සවිකර ඇති අරය r වන රළු සිලින්ඩරාකාර පයිපයක ගැටෙමින් ද සමතුලිතව ඇත්තේ ඉනිමගේ අනෙක් කෙළවර සිලින්ඩරයෙන් ඉවතට පවතින පරිදිය. ඉනිමගේ පහළ අඩියේ සිට එහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය දක්වා දුර b වේ. ඉනිමග හරහා යන සිරස් තලය සිලින්ඩරයේ අක්ෂයට ලම්භක වේ. λ යනු ඉනිමග ගැටී ඇති ලක්ෂ්‍යවල ඝර්ෂණ කෝණද 2α ($b < \cot\alpha$ වන සේ) යනු ඉනිමග තිරස සමග සාදන කෝණයද ඉනිමගේ පහළ අඩියේ සිට x දුරකින් ඉනිමගේ බරට සමාන භාරයක් එල්ලා ඇත්නම් ද ඉනිමග ගැටී ඇති සියලු ම ලක්ෂ්‍ය සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ ඇත්නම් $(b + x)\sin^2\alpha \cos 2\alpha = r\sin\lambda\cos\lambda$ බව පෙන්වන්න.

C හිදී F_1 හා R_1 සම්ප්‍රයුක්ත බලය S_1 ද

A හිදී F_2 හා R_2 හි සම්ප්‍රයුක්ත බලය S_2 ද

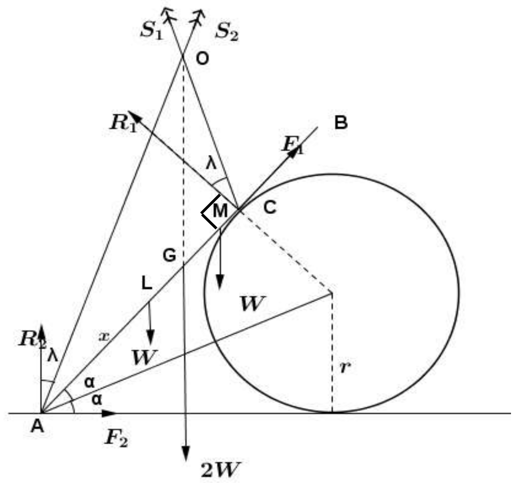
දණ්ඩේ බර හා බාරයක මත බරවල සම්ප්‍රයුක්ත බර වන

2 W ද O ලක්ෂ්‍යයේ දී එකිනෙක හමුවේ.

ඉනිමග සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ ඇත්නම්

(i) R_1 හා S_1 අතර කෝණය λ වේ

(ii) R_2 හා S_2 අතර කෝණය λ ද වේ



$AM = b, \quad AC = r\cot\alpha$

$AL = x\ AM = b$,

එම නිසා $AG = AL + LG \ = x + \dfrac{b-x}{2} = \dfrac{b+x}{2}$

දැන් $AG = \dfrac{b+x}{2}$ හා $GC = r\cot\alpha - \left(\dfrac{b+x}{2}\right)$

ACO ත්‍රිකෝණයට කොට් ප්‍රමේය යෙදීමෙන්

$$(AG+GC)\cot(90^\circ - 2\alpha) = GC\cot\left[90^\circ - (\lambda + 2\alpha)\right] - AG\cot(90^\circ + \lambda)$$

$$AC\tan 2\alpha = GC\tan(\lambda + 2\alpha) + AG\tan\lambda$$

$$r\cot\alpha.\tan 2\alpha = \left[r\cot\alpha - \left(\frac{b+x}{2}\right)\right]\tan(\lambda + 2\alpha) + \left(\frac{b+x}{2}\right)\tan\lambda$$

$$r\cot\alpha\left[\tan 2\alpha - \tan(\lambda + 2\alpha)\right] = \left(\frac{b+x}{2}\right)\left[\tan\lambda - \tan(\lambda + 2\alpha)\right]$$

$$r\cot\alpha\left[\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \frac{\sin(\lambda + 2\alpha)}{\cos(\lambda + 2\alpha)}\right] = \left(\frac{b+x}{2}\right)\left[\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda} - \frac{\sin(\lambda + 2\alpha)}{\cos(\lambda + 2\alpha)}\right]$$

$$r\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left[\frac{\sin\left[2\alpha - (\lambda + 2\alpha)\right]}{\cos 2\alpha.\cos(\lambda + 2\alpha)}\right] = \left(\frac{b+x}{2}\right)\left[\frac{\sin\left[\lambda - (\lambda + 2\alpha)\right]}{\cos\lambda.\cos(\lambda + 2\alpha)}\right]$$

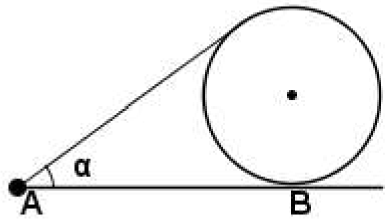
$$r\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \times \frac{\sin(-\lambda)}{\cos 2\alpha} = \left(\frac{b+x}{2}\right)\frac{\sin(-2\alpha)}{\cos\lambda}$$

$$\frac{r\cos\alpha.\sin\lambda}{\sin\alpha.\cos 2\alpha} = \left(\frac{b+x}{2}\right)\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\lambda}$$

$$r\sin\lambda\cos\lambda = (b+x)\sin^2\alpha.\cos 2\alpha$$

උදාහරණ 7

බර W වන A අංශුවක් රළු තිරස් බිම මත නිසලව තබා ඇත. සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් අතර w a හා බර W වන ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක් වටා දවටා ඇති අතර එක කෙළවරක් A අංශුවට සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුව සිලින්ඩරයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය Bහිදී ස්වර්ශ කරයි. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර සිලින්ඩරයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයට සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුව හරහා යන සිරස් තලය සිලින්ඩරයේ අක්ෂයට ලම්භකව සිලින්ඩරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා ගමන් කරමින් බිම ABහිදී රූපයේ පරිදි ඡේදනය කරයි.



තන්තුව තදව AB සමග α කෝණයක් සාදයි. සිලින්ඩරය Bහිදී චලනය වීම වැලැක්වීමට ප්‍රමාණවත් තරම් පොළොව රළු වේ. සිලින්ඩරය මත සූර්ණය G වූ යුග්මයක් අංශු සීමාකාරී සමතුලිතතාවයෙන් පවතින සේ යොදා ඇත. අංශුව හා පොළොව සර්ෂණ සංගුණකය μ නම් තන්තුවේ ආතතිය $\dfrac{\mu W}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$ වන බව පෙන්වන්න. B වටා සූර්ණ ගැනීමෙන් Gහි අගය සොයන්න.

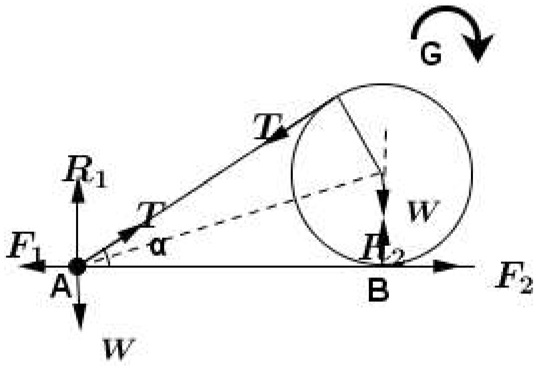
පද්ධතියේ සමතුලිතතාව සඳහා

තිරසට විභේදනයෙන්

$$\rightarrow \; F_2 - F_1 = 0$$
$$F_2 = F_1$$

සිරසට විභේදනයෙන්

$$\uparrow \; R_1 + R_2 - W - w = 0$$
$$R_1 + R_2 = W + w$$



අංශුවේ සමතුලිතතාව සඳහා

තිරසට විභේදනයෙන්

$$\rightarrow T\cos\alpha - F_1 = 0 \quad ; \quad F_1 = T\cos$$

සිරසට විභේදනයෙන්

$$\uparrow \; R_1 + T\sin\alpha - w = 0 \; ; R_1 = w - T\sin\alpha$$

සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේදී

$$\frac{F_1}{R_1} = \mu$$

$$\frac{T\cos\alpha}{w - T\sin\alpha} = \mu \quad ; \quad T(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = \mu w$$

$$T = \frac{\mu w}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

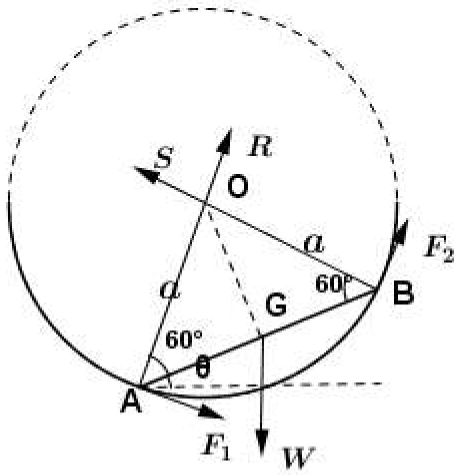
සිලින්ඩරයේ සමතුලිතතාව සඳහා

$$\text{Bm} \quad T(a + a\cos\alpha) - G = 0$$
$$G = T.\,a\,(1 + \cos\alpha)$$
$$= \frac{\mu w a\,(1 + \cos\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

උදාහරණ 8

අරය a වන රළු අර්ධ ගෝලාකාර අචල පත්‍රයක ඇතුළත සිරස් තලයක බර W හා දිග a වන ඒකාකාර දණ්ඩක් නිසලව පවතී. දණ්ඩ තිරසට θ කෝණයක් ආනතව සීමාකාරී සමතුලිතතාවේ පවතී. ඝර්ෂණ සංගුණකය $\mu\left(<\sqrt{3}\right)$ දණ්ඩේ පහළ කෙළවරේ දී ප්‍රතික්‍රියාව $\dfrac{W\cos\theta}{\sqrt{3}-\mu}$ බව පෙන්වා ඉහත කෙළවරේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

$\tan\theta = \dfrac{4\mu}{3-\mu^2}$ බව පෙන්වන්න.



දණ්ඩ සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ ඇති නිසා

$F_1 = \mu R$ and $F_2 = \mu S$

ABහි සමතුලිතතාව සඳහා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$B\curvearrowleft \quad -R.\,a\sin 60° + \mu R.\,a\sin 30° + w.\frac{a}{2}\cos\theta = 0$$

$$-R\frac{\sqrt{3}}{2} + \mu R.\frac{1}{2} + w.\frac{1}{2}\cos\theta = 0$$

$$R\left(\sqrt{3}-\mu\right) = w\cos\theta \quad ; \quad R = \frac{w\cos\theta}{\sqrt{3}-\mu} \text{ ---------(1)}$$

A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$A\curvearrowleft \quad S.a\sin 60° + \mu S.a\sin 30° - w.\frac{a}{2}\cos\theta = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}S}{2} + \frac{\mu S}{2} = \frac{w\cos\theta}{2}$$

$$S = \frac{w\cos\theta}{\left(\sqrt{3}+\mu\right)} \text{ ---------------(2)}$$

O වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$O\curvearrowleft \quad F_1.a + F_2.a - w\left(\frac{a}{2}\cos\theta - a\cos(60+\theta)\right) = 0$$

$$\mu(R+S) = w\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$$

$$\mu\left[\frac{w\cos\theta}{\sqrt{3}-\mu} + \frac{w\cos\theta}{\sqrt{3}+\mu}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}w\sin\theta$$

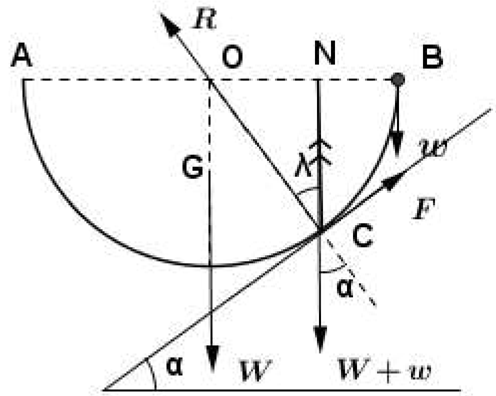
$$\frac{\mu\cos\theta\times 2\sqrt{3}}{3-\mu^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}w\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{4\mu}{3-\mu^2}$$

උදාහරණ 9

බර W වන ඒකාකාර ඝණ අර්ධ ගෝලයක් වක්‍ර පෘෂ්ඨය තිරසට α කෝණයකින් ආනත රළු තලයක් මත තබා ඇත. එහි තල පෘෂ්ඨයේ පරිධියේ ලක්ෂ්‍යයකට කුඩා w භාරයක් සම්බන්ධ කර ඇති විට තල මුහුණත තිරස් වේ. μ යනු ඝර්ෂණ සංගුණකය නම් එවිට $\mu = \dfrac{w}{\sqrt{W(W+2w)}} = \tan\alpha$ බව පෙන්වන්න.

අර්ධ ගෝලයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G හිදී වන අතර $OG = \frac{3}{8}a$.



F හා R බල අර්ධ ගෝලය මත C හිදී ක්‍රියා කරයි.

W හා w හි සම්ප්‍රයුක්තය ද C හරහා යායුතුය.

N වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$W.ON - w.BN = 0$$

$$W.ON = w(a - ON)$$

$$(W - w).ON = w.a$$

$$ON = \frac{w.a}{W + w}$$

පද්ධතියේ සමතුලිතතාව සඳහා F හා R හි සම්ප්‍රයුක්තය $(W+w)$ ට විශාලත්වයෙන් සමාන හා දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ විය යුතුය. සමතුලිතතාව සීමාකාරී නිසා $O\hat{C}N = \lambda$

$$\tan\lambda = \frac{ON}{CN} = \frac{ON}{\sqrt{a^2 - ON^2}}$$

$$= \frac{\frac{w.a}{W+w}}{\sqrt{a^2 - \frac{w^2a^2}{(W+w)^2}}}$$

$$= \frac{w}{\sqrt{W^2 + 2Ww}}$$

$$\mu = \frac{w}{\sqrt{W(W+2w)}}$$

$$= \tan\alpha \quad (\text{since } \lambda = \alpha)$$

උදාහරණ 10

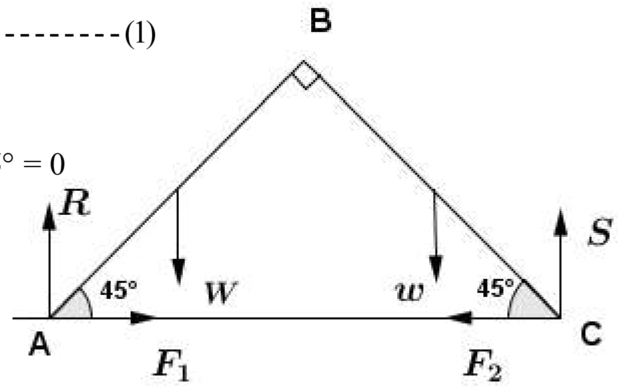
සමාන දිග AB හා BC ඒකාකාර දඬු දෙකක බර W හා w වේ. $(W > w)$ ඒවා B හිදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. දඬු සිරස් තලයේ $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$ වන සේ A හා C දෙකෙළවර රළු තිරස් පොළොව ගැටෙමින් සමතුලිතතාවයෙන් පවතී. දඬු හා පොළොව අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ. සමතුලිතතාව රැක ගැනීමට μ සඳහා ගත හැකි අවම අගය $\dfrac{W+w}{W+3w}$ බව පෙන්වන්න. $\mu = \dfrac{W+w}{W+3w}$, නම් C හිදී ලිස්සීමට ආසන්න වන නමුත් A හිදී එසේ නොවන බව පෙන්වන්න.

පද්ධතියේ සමතුලිතතාව සඳහා

$\rightarrow \quad F_1 - F_2 = 0 \quad ; \quad F_1 = F_2$ (= F, ලබා ගනිමු)

$\uparrow \quad R + S - W - w = 0$

$R + S = W + w$ ----------------- (1)



A↺ = 0

$S.\,4a\cos 45° - w.\,3a\cos 45° - Wa\cos 45° = 0$

$S = \dfrac{W+3w}{4}$ and $R = \dfrac{3W+w}{4}$

AB හි සමතුලිතතාව සඳහා B↺ = 0

$F_1.2a\sin 45° + Wa\cos 45° - R.2a\cos 45° = 0$

$2F_1 + W - 2R = 0$

$$F_1 = R - \frac{W}{2}$$
$$= \frac{3W+w}{4} - \frac{W}{2}$$
$$= \frac{W+w}{4}$$
$$F_1 = F_2 = F = \frac{W+w}{4}$$

පද්ධතියේ සමතුලිතතාව සඳහා

$$\frac{F_1}{R} \le \mu \quad , \quad \frac{F_2}{S} \le \mu$$

$$\frac{F_1}{R} = \frac{\frac{W+w}{4}}{\frac{3W+w}{4}} = \frac{W+w}{3W+w} \le \mu$$

$$\frac{F_2}{S} = \frac{\frac{W+w}{4}}{\frac{W+3w}{4}} = \frac{W+w}{W+3w} \le \mu$$

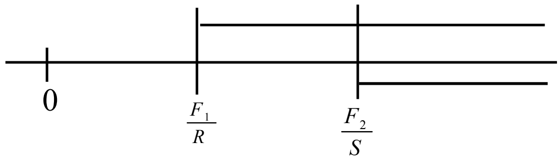
දැන්, $R - S = \frac{3W+w}{4} - \frac{W+3w}{4} = \frac{W-w}{2} > 0$

එනම් $R > S$

$$R > S\ (>0) \Rightarrow \frac{1}{R} < \frac{1}{S}$$

$$\Rightarrow \frac{F}{R} < \frac{F}{S}$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{R} < \frac{F_2}{S}$$



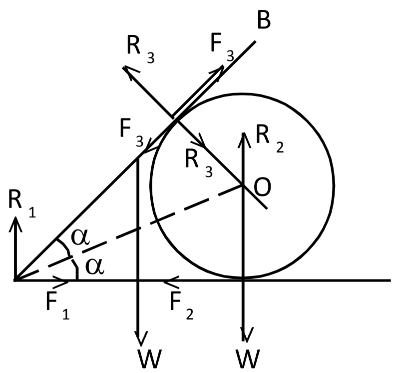
$$, \frac{F_1}{R} \leq \mu, \quad \frac{F_2}{S} \leq \mu$$

විය හැකි අවම අගය $\frac{F_2}{S} = \frac{W+w}{W+3w}$ වේ.

$\mu = \frac{W+w}{W+3w}$, නම්, C හිදී පළමු ලිසසීම සිදු වේ.

උදාහරණ 11

බර W හා දිග 4ℓ වන AB ඒකාකාර බාල්කයක A කෙළවර රළු තිරස් පොළොව මත හා A සිට 3ℓ දුරින් වූ ලක්ෂ්‍යයක් අරය ℓ වූ රළු සිලින්ඩරයක් හා ගැටෙමින් සමතුලිතතාව පවතී. සිලින්ඩරය ඒකාකාර වන අතර බර W වේ. එහි අක්ෂය බාල්කය හරහා යන සිරස් තලයට ලම්භක තබා ඇත. එක් එක් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ ඝර්ෂණ බලය සොයා සමතුලිතතාව පැවතීමට $\mu \geq \frac{8}{21}$, විය යුතු බව පෙන්වන්න. මෙහි μ ඝර්ෂණ සංගුණකයයි.



පද්ධතියේ සමතුලිතතාව සඳහා

තිරසට විභේදනයෙන්

$$\rightarrow F_1 - F_2 = 0 \quad ; \quad F_1 = F_2$$

සිරසට විභේදනයෙන්

$$\uparrow R_1 + R_2 - 2W = 0$$

$$R_1 + R_2 = 2W \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ①$$

ගෝලයේ සමතුලිතතාව සඳහා

O⤺ $\quad F_2.a - F_3.a = 0 \ ; \ F_2 = F_3$

$$F_1 = F_2 = F_3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ②$$

AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාව සඳහා

A⤺ $\quad R_3.3\ell - W.2\ell\cos 2\alpha = 0$

$$R_3 = \frac{2W\cos 2\alpha}{3} = \frac{8W}{15} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ③$$

පද්ධතියේ සමතුලිතතාව සඳහා

A⤺ $\quad R_2.3\ell - W.3\ell - W.2\ell\cos 2\alpha = 0$

$$3R_2 = 3W + 2W \times \frac{4}{5}$$

$$R_2 = \frac{23W}{15} \ ; \ ①න් \ R_1 = \frac{7W}{15} \ \ldots\ldots\ldots\ldots ④$$

AB හි සමතුලිතතාව සඳහා

AB දිගේ විභේදනයෙන්

$$\nearrow F_3 + F_1 \cos 2\alpha + R_1 \sin 2\alpha - W \sin 2\alpha = 0$$

$$F_3 + F_1 \cos 2\alpha = \left(W - \frac{7W}{15}\right) \sin 2\alpha$$

$$F_1\left(1 + \cos 2\alpha\right) = \frac{8W}{15} \times \frac{3}{5} = \frac{24W}{75} \quad (\therefore\ F_1 = F_3)$$

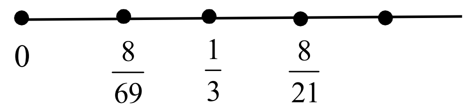
$$F_1\left(1 + \frac{4}{5}\right) = \frac{24W}{75};\ F_1 = \frac{8W}{45}$$

සමතුලිත වීමට

$$\frac{F_1}{R_1} \le \mu\ ; \quad \frac{F_2}{R_2} \le \mu, \frac{F_3}{R_3} \le \mu$$

$$\frac{8W}{45} \times \frac{15}{7W} \le \mu\ ;\ \frac{8W}{45} \times \frac{15}{23W} \le \mu;\ \frac{8W}{45} \times \frac{15}{8W} \le \mu$$

එනම් $\mu \ge \frac{8}{21},\ \mu \ge \frac{8}{69}\ ;\ \mu \ge \frac{1}{3}$



එනයින් සමතුලිතව පැවතීමට $\mu \ge \frac{8}{21}$

උදාහරණ 12

ABC සමපාද ත්‍රිකෝණය BC පාදය රළු තිරස් තලයක් මත තිබෙන පරිදි සිරස් තලයක පවතී. ත්‍රිකෝණ තලයේ ද ඉහළ ම A ශීර්ෂයේදී ක්‍රමයෙන් වැඩි වන තිරස් බලයක් යොදනු ලැබේ. ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ට වඩා අඩුනම් එය පෙරළීමට පෙර ලිස්සායන බව ඔප්පු කරන්න.

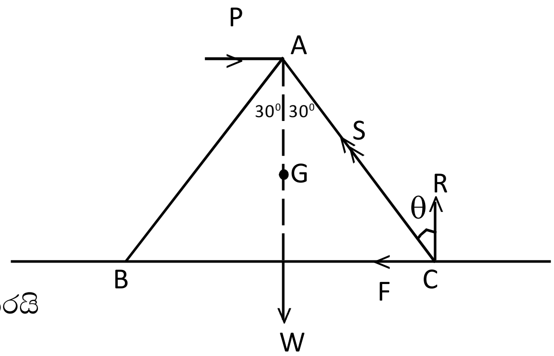
ක්‍රමය I

ABC ත්‍රිකෝණය මත බල

(i) G හිදී බර W

(ii) A හිදී තිරස් P බලය

(iii) A හිදී ඝර්ෂණය බලය F හා අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව



ත්‍රිකෝණය පෙරළෙන්නේ නම් එය සිදුවන්නේ C වටාය පෙරළෙන අවස්ථාවේදී අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව C හිදී ක්‍රියා කරයි A හිදී P තිරස් බලයක් G හි W බරක් A හිදී හමුවේ

එම නිසා F හා R හි සම්ප්‍රයුක්තය S A හරහා CA දිගේ ක්‍රියා කරයි

θ යනු R හා S අතර කෝණය යයසි සිතමු

(i) $\lambda < \theta,$ නම් පෙරළීමට පෙර ලිස්සයි

(ii) $\lambda > \theta,$ නම් ලිස්සීමට පෙර පෙරළෙයි

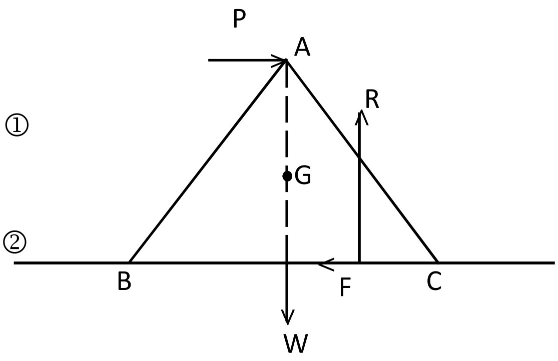
$\lambda < \theta$, නම් එවිට $\tan\lambda < \tan\theta$

$\tan\lambda < \tan 30°$

$\tan\lambda < \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\mu < \frac{\sqrt{3}}{3}$ එනයින් $\mu < \frac{\sqrt{3}}{3}$ නම් ත්‍රිකෝණය පෙරළීමට පෙර ලිස්සයි.

ක්‍රමය II

ABC ත්‍රිකෝණයේ සමතුලිතතාව සඳහා



බල තිරසට විභේදනයෙන්

$\rightarrow$ P − F = 0 ; F = P .... ①

බල සිරසට විභේදනයෙන්

$\uparrow$ R-W = 0 ; R = W .... ②

සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේදී

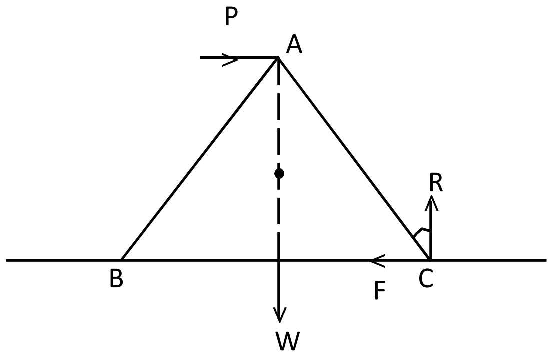
$\frac{F}{R} = \mu$; $\frac{P}{W} = \mu$; P = μ W

ABC ත්‍රිකෝණයේ සමතුලිතතාව සඳහා

$\rightarrow$ P − F = 0 ; F = P

$\uparrow$ R-W = 0 ; R = W

පෙරළෙන අවස්ථාවේ දී R , C හිදී ක්‍රියා කරයි



B වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

B↻ $R \times 2a - P\sqrt{3}a - W.a = 0$

$P = \frac{W}{\sqrt{3}}$

$P = \mu W$ විට, ආස්තරය ලිස්සීම අරඹයි.

$P = \frac{W}{\sqrt{3}}$ විට ආස්තරය C වටා පෙරළේ.

$\mu W < \frac{W}{\sqrt{3}}$ නම් ආස්තරය පෙරළීමට පෙර ලිස්සයි.

එනම් $\mu < \frac{1}{\sqrt{3}}$ නම් ආස්තරය පෙරළීමට පෙර ලිස්සයි.

7.4 අභ්‍යාසය

1. ඝර්ෂණ සංගුකය $\frac{3}{4}$ ක් වන තිරසට 30° ක් ආනත රළු තලයක් මත $80\ \mathrm{kg}$ ක ස්කන්ධයක් ඉහළට චලනය කිරීමට අවශ්‍ය අවම බලය සොයන්න.

2. තිරසට α ආනත වූ තලයක් මත බරක් ඉහළට චලනය කිරීමට අවශ්‍ය අවම බලය එම බර තලය දිගේ පහළට ලිස්සා යාම වැළැක්වීමට යොදන අවම බලය මෙන් දෙගුණයක් නම් බර සහ තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{3}\tan\alpha$ බව පෙන්වන්න.

3. ආනත තලයක් දිගේ බරක් ඉහළට චලනය කිරීම අවශ්‍ය අවම බලය P වේ. තලයට සමාන්තරව අවශ්‍ය අවම බලය $P\sqrt{1+\mu^2}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි μ ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.

4. රළු ආනත තලයක් දිගේ යෙදෙන P බලය තලය මත වස්තුවක් රඳවා ගැනීමට යන්නම් ප්‍රමාණවත් වේ. ඝර්ෂණ කෝණය λ තලයේ කෝණය α ට වඩා අඩුවේ. වස්තුව තලය දිගේ ඉහළට ඇදගෙන යාමට අවශ්‍ය අවම ප්‍රමාණවත් තලය දිගේ ක්‍රියාකරන බලය $P\frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\sin(\alpha-\lambda)}$ බව ඔප්පු කරන්න.

5. ඒකාකාර ඉණිමගක් සිරසට 30° ක් ආනතව සිරස් බිත්තියක් මත ගැටෙමින් නිශ්චලව පවතී. එය ලිස්සා යාමට ආසන්න තම අවස්ථාවේ පවතී නම් ඝර්ෂණ සංගුණකය බිත්තිය සමගත් පොළොව සමගත් එකම වේ යයි උපකල්පනය කර සොයන්න.

6. ඒකාකාර බර W වන ඉණිමගක් රළු තිරස් පොළොව මත සුමට සිරස් බිත්තියකට හේත්තු වෙමින් තිරසට α කෝණයක් ආනතව සමතුලිතව පවතී. $\frac{w}{W} > \frac{2(1 - \mu\tan\alpha)}{2\mu\tan\alpha - 1}$ නම් බර W වන මිනිසෙකුට ඉණිමග ලිස්සීමෙන් තොරව ඉහළටම නැගීමට හැකි බව ඔප්පු කරන්න.

7. දිග 2ℓ වන ඒකාකාර ඍජු බාල්කයක්, උස h වූ රළු බිත්තියක් සමග ගැටෙමින් සීමාකාරි සමතුලිතතාවයේ පවති. බාල්කයේ එක් කෙළවරක් තිරස් තලය මතද අනෙක් කෙළවර බිත්තියෙන් ඉවත ගමන් කරන සේ පවතී. බිත්තියක් පොළොවත් සම සේ රළු නම් ඝර්ෂණ කෝණය λ, $h.\sin 2\lambda = \ell\sin\alpha\cos 2\alpha$ මගින් දෙනු ලබන බව සාධනය කරන්න. මෙහි α යනු බාල්කයේ තිරසට ආනතිය වේ.

8. ඒකාකාර ඉණිමගක් දෙකෙළවර රළු සිරස් බිත්තියක් හා ඒ හා සමාන රළු තිරස් බිමක් මත ගැටෙමින් නිශ්චලතාවයේ පවතී. ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය දෙකෙහිම ඝර්ෂණ සංගුණක $\frac{1}{3}$ බැගින් වේ. ඉණිමග සිරස සමග ආනතිය $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ නම් සමතුලිතතාවය නොබිදෙන පරිදි ඉණිමගේ බරට සමාන බරක් ඉණිමගෙහි පාදයේ සිට $\frac{9}{10}$ ක දුරකට වඩා වැඩි දුරකින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කළ නොහැකි බව ඔප්පු කරන්න.

9. දිග $2a$ වන බර ඒකාකාර දණ්ඩක් රළු නා දැත්තක් මත එක් කෙළවරක් පවතින සේත් රළු සිරස් බිත්තියකට හේත්තු කර සමතුලිතව තබා ඇත. බිත්තියේ සිට නා දැත්තට දුර ℓ නම් දණ්ඩ බිත්තිය සමග ගැටෙන ලක්ෂ්‍යය නා දැත්තට ඉහළින් වේ. දණ්ඩ පහළට ලිස්සා යාමට ආසන්න අවස්ථාවේ පවතී නම් $\sin^3\theta = \frac{c}{a}\cos^2\lambda$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ ගැටෙන ලක්ෂ්‍යය 2හිම ඝර්ෂණ කෝණය වේ θ දණ්ඩ යටි සිරස සමග සාදන කෝණයයි.

10. දිග ℓ වන ඒකාකාර ඉණිමගක් එහි ඉහළ කෙළවර a උසකින් පිහිටි සුමට තිරස් පීල්ලක යන්තම් ඉවතට නෙරන සේ රළු තිරස් පොළොවක් මත නිශ්චලතාවයේ පවතී. ඉණිමග ලිස්සීමට ආසන්න ව ඇත්නම් සහ පොළොව මත ඝර්ෂණ කෝණය λ නම් $\tan\lambda = \dfrac{a\sqrt{\ell^2 - a^2}}{\ell^2 + a^2}$ බව ඔප්පු කරන්න.

11. ඒකාකාර දණ්ඩක් සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ පවතී එහි එක් කෙළවරක් රළු තිරස් තලය මත ද අනෙක් කෙළවර තිරසට α කෝණයකින් ආනත සමාන රළු බවක් ඇති තලයක මත ද වේ දණ්ඩ සිරස් තලයේ පවතී නම් ද ඝර්ෂණ කෝණය λ නම් ද දණ්ඩේ තිරසට ආනතිය $\tan^{-1}\left[\dfrac{\sin(\alpha - 2\lambda)}{2\sin\lambda\sin(\alpha-\lambda)}\right]$ බව

පෙන්වන්න.

12. ඒකාකාර දණ්ඩක් රළු සිරස් පුඩුවක් තුළ රඳවා ඇත. දණ්ඩ පුඩුවේ කේන්ද්‍රයේ 60° ක කෝණයක් ආපාතනය කරයි නම් එහි ඝර්ෂණ සංගුණකය $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ නම් සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේදී දණ්ඩ තිරසට

ආනතිය $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ බව පෙන්වන්න.

13. ඒකාකාර සමාන AC, CB දඬු දෙකක් C හිදී සුමටව සන්ධි කර A,B කෙළවරවල් රළු තිරස් තලයක් හා ස්පර්ශව සිරස් තලයක නිශ්චලතාවක් පවතී. ඝර්ෂණ සංගුණකය μ. නම් සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේදී $\sin A\hat{C}B = \dfrac{4\mu}{1+\mu^2}$ බව පෙන්වන්න.

14. සමපාද ත්‍රිකෝණාකාර ඒකාකාර ආස්තරයක් එක් ශීර්ෂයක් තිරස් තලයක් මත ද අනෙක් ශීර්ෂය සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව ද නිශ්චලතාවයේ පවතී. ආස්තරය සහිත සිරස් තලය බිත්තියට ලම්භක වේ. එම ශීර්ෂ හරහා යන දාරය තිරස් තලය සමග සාදන අඩුතම කෝණය θ, $\cot\theta = 2\mu + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ මගින් ලබා දෙන බව පෙන්වන්න. μ ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.

15. දිග $2a$ සහ බර W වන AB ඒකාකාර ඉණිමගක් A කෙළවර රළු තිරස් බිමක ද අනෙක් B කෙළවර රළු සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව ද නිශ්චලතාවයේ පවතී. ඉණිමගේ කෙළවරවල් දෙකෙහිම ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ. ඉනිමග පොළොවට $\dfrac{\pi}{4}$ ක කෝණයක් ආනත වන අතර බර nW වන කඩා බළලෙක් A කෙළවරේ සිට සීරුවෙන් ඉණිමග දිගේ ඉහළට නගියි. ඉණිමගේ සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේදී බළලා

ඉණිමග දිගේ $\dfrac{a}{n\left(1+\mu^2\right)}\left[\mu^2(1+2n)+2\mu(1+n)-1\right]$ දුරක් නැග ඇති බව පෙන්වන්න.

තවදුරටත් $\mu=\dfrac{1}{2}$ බව දී ඇති විට $n<\dfrac{1}{4}$ නම් ඉණිමග ලිස්සීමට පෙර බළලා ඉනිමගේ මුදුනට ළඟා වන බව පෙන්වන්න. $n=\dfrac{1}{4}$ නම් කුමක් සිදුවේ ද?

16. දිග ℓ වන බර W ඒකාකාර AB ඉනිගමක් A කෙළවර රළු තිරස් පොළොව මත ද අනෙක් B කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට හේත්තු වන සේ ද සමතුලිතව පවතී. ඉණිමග බිත්තියට ලම්භක සිරස් තලයේ තිරසට α කෝණයකින් ආනත වේ. ඉණිමග හා පොළොව අතර සර්ෂණ සංගුණකය μ වේ. තිරස් P බලයක් $AC=a(<\ell)$ වන සේ ඉණිමග මත වූ C ලක්ෂ්‍යයක් මත බිත්තිය දෙසට යොදනු ලැබේ. ඉණිමග බිත්තිය දෙසට ලිස්සා යාමට ආසන්නව සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ පවතී නම් $\mathrm{P}=\dfrac{\ell w}{2(\ell-a)}\left(2\mu+\tan\alpha\right)$ බව පෙන්වන්න.

17. බරින් සමාන එහෙත් දිගින් අසමාන AB, BC ඒකාකාර දඬු දෙකක් B හිදී සුමට ලෙස සන්ධි කර එකම තිරස් රේඛාවක වූ සමසේ රළු අචල නා දැති දෙකක් මත සිරස් තලයක තබා ඇත. දඬුවල තිරසට ආනතිය α හා β වේ. දඬු දෙකම සීමාකාරි සමතුලිතතාවයේ වේ. අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරසට ආනතිය $2\tan\theta=\cot(\beta+\lambda)-\cot(\alpha-\lambda)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු දඬු හා නා දැති අතර සර්ෂණ කෝණයයි.

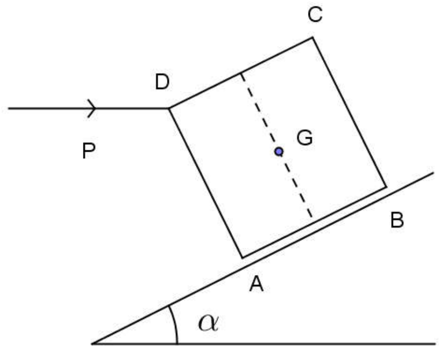
18. දිග ℓ බැගින් වන ඒකාකාර එක සමාන ඉණිමන් දෙකක් ඒවායේ මුදුන්වලින් අසව් කර පොළොව සමග සිරස් කෝණ 2θ වන පරිදි සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් සාදමින් රලු පොළොවක් මත නිශ්චලතාවයේ පවතී. ඉණිමගක බර මෙන් n ගුණයක් බර මිනිසෙක් ඉණිමගක් දිගේ ඉහළට සෙමෙන් ගමන් කරයි ඉණිමගේ ඉහළ සිට ඔහුගේ දුර x වන විට පොළෙවේ දී ඇතිවන ප්‍රතික්‍රියාව ගණනය කර $\dfrac{nx}{\ell}=\dfrac{2\mu-\tan\theta}{\mu-\tan\theta}+n$ වන විට ලිස්සීම ආරම්භ වන බව පෙන්වන්න.

19. අරය a වන සුමට සිලින්ඩරයක් රළු තිරස් මේසයක් මත එහි අක්ෂය මේසයට සමාන්තර වන සේ සවි කර ඇත. දිග $6a$ හා M ස්කන්ධය වන ඒකාකාර ACB දණ්ඩක් A කෙළවර මේසය මත ද ලක්ෂ්‍යය සිලින්ඩරය ස්පර්ෂ කරමින් ද සිලින්ඩරයේ අක්ෂ්‍යයට ලම්භක සිරස් තලයේ මේසය සමග 2θ කෝණයක් සාදමින් සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත.

a) සිලින්ඩරය මගින් දණ්ඩ මත ඇති කරන බලයේ විශාලත්වය $3\mathrm{Mg}\cos 2\theta.\tan\theta$ බව පෙන්වන්න.

b) සමතුලිතතාව සීමාකාරී නම් දණ්ඩ හා මේසය අතර සර්ෂණ සංගුණකය μ, $\mu(\cot\theta-3\cos^2 2\theta)=3\sin 2\theta\cos 2\theta$, මගින් දෙනු ලබන බවත් පෙන්වන්න.

20. බර W හා පැත්තක දිග වන ඒකාකාර ඝණයක කේන්ද්‍රය හරහා යන සිරස් හරස් කඩ ABCD නිරූපණය කරයි. මෙම ඝණය තිරසට α කෝණයක් ආනත රළු තලයක් මත තබා ඇත. රූපයේ පෙන්වන පරිදි ක්‍රමයෙන් වැඩිවන තිරස් P බලයක් Dහිදි යොදනු ලැබේ. තලය හා ඝණය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ නම් ඝණය තලය දිගේ ඉහළට චලනය වීමෙන් සමතුලිතතාව බිඳ වැටීමට μ ට තිබිය හැකි අගය පරාසය සොයන්න. $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$ බව දී ඇත.

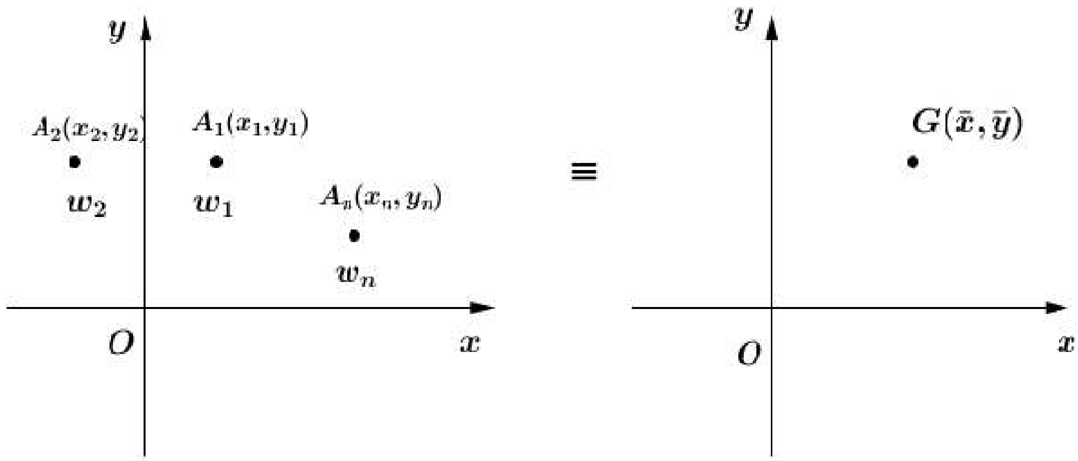


8.0 ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය

8.1 අංශු පද්ධතියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය

වස්තුවක හෝ දෘඪ ලෙස එකිනෙකට සම්බන්ධ කළ අංශු පද්ධතියක වස්තුව කුමන පිහිටීමක තැබුවත් එහි බරෙහි ක්‍රියා රේඛාව සැම විටම ලක්ෂ්‍යයක් හරහා ගමන් කරයි. එම ලක්ෂ්‍යය ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය වේ.

අංශු පද්ධතියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය



$w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots\ldots w_n$ භාරයන් වන අංශු පද්ධතියක් සලකන්න. ඒවා තලයක $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots A_n$ ලක්ෂ්‍යවල තබා ඇත. ඍජු කෝණාස්‍ර OX, OY අක්ෂවලට අනුබද්ධව මෙම ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක පිළිවෙලින් (x_1, y_1), (x_2, y_2) ....(x_n, y_n) යයි සිතමු.

OXY ට අනුබද්ධව ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක $(\bar{x}, \bar{y})$ ලෙස ගනිමු.

එවිට අංශු භාරයන් සමාන්තර බල පද්ධතියක් ගොඩනගයි. ඒවායේ සම්ප්‍රයුක්තය $(w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + w_n)$ වන අතර $(\bar{x}, \bar{y})$ හිදී ක්‍රියාකරයි. තලය තිරස් යයි සිතමු. බල හා සම්ප්‍රයුක්තය සඳහා OX හා OY වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\bar{x}\left(w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n\right) = w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + w_nx_n$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

$$\bar{y}\left(w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n\right) = w_1y_1 + w_2y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + w_ny_n$$

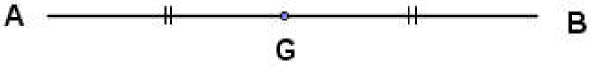
$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

සටහන :

ඒකාකාර වස්තු සඳහා ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයක් ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයත්, කේන්ද්‍රකයත් සාමාන්‍යයෙන් එකම වේ.

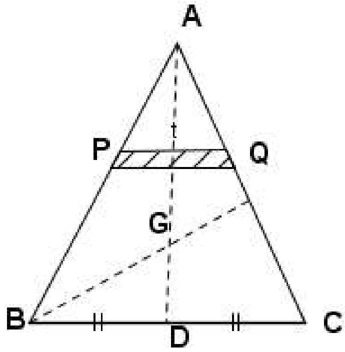
8.2 ඒකාකාර දණ්ඩක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය

AB ඒකාකාර දණ්ඩක් නම් AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය G නම් එවිට AB දණ්ඩේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G වේ.

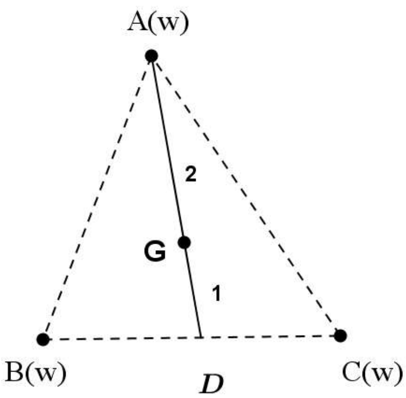


ඒකාකාර ත්‍රිකෝණාකාර තහඩුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය

ABC ත්‍රිකෝණාකාර තහඩුවක් යයි සිතමු. එය BC ට සමාන්තරව PQ වැනි තුනී පටි අතිවිශාල ගණණකට බෙදන්නේ යයි සිතමු. එක් එක් පටියේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ඒවායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ වේ. ඒ නිසා මුලු ත්‍රිකෝණයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය මෙම පටිවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය හරහා යන රේඛාව මත පිහිටයි. මෙසේ ත්‍රිකෝණයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය AD මධ්‍යස්ථය මත වේ. එලෙසම ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය B හා C හරහා යන මධ්‍යස්ථ මතද වේ. එබැවින් ත්‍රිකෝණාකාර ආස්තරයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය මධ්‍යස්ථවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වේ මෙහි $\frac{AG}{GD}=\frac{2}{1}$ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ත්‍රිකෝණයේ මධ්‍යස්ථය මත ශීර්ෂයේ සිට මධ්‍යස්ථයේ දිග $\frac{2}{3}$ ක් දුරින් පිහිටයි.



ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂවල තබන ලද සමාන අංශු තුනක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය



B හා C හි වූ w භාර දෙක D හි $2w$ භාරයකට තුල්‍ය වේ. මෙහි D යනු BCහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයයි.

දැන් පද්ධතිය A හි w භාරයකට D හි $2w$ භාරයකට තුල්‍ය වේ.

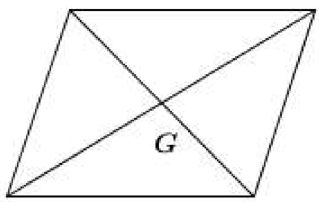
A හි w භාරයක් D හි $2w$ භාරයක් G හි $3w$ භාරයකට තුල්‍ය වේ.

එනයින් පද්ධතියේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය මධ්‍යස්ථවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යයයි.

ඕනෑම ඒකාකාර ත්‍රිකෝණාකාර ආස්තරයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයක්, ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂවල තබන ලද සමාන අංශු තුනක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයක් එකම වේ.

ඒකාකාර සමාන්තරාස්‍රයක හැඩය ඇති ආස්තරයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය

සමාන්තරාස්‍රාකාර ආස්තරයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි විකර්ණවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වේ.



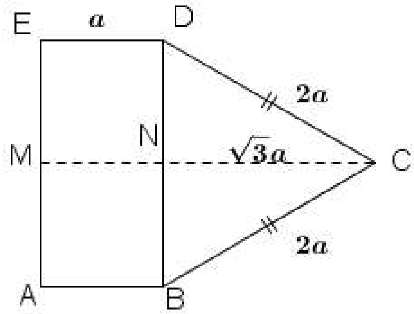
ඒකාකාර වෘත්තාකාර වලල්ලක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය

වෘත්තාකාර වලල්ල ඕනෑම විශ්කම්භයක් වටා සමමිතික වේ. එබැවින් වෘත්තාකාර වලල්ලක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය විශ්කම්භ හමුවන ලක්ෂ්‍ය එනම් වෘත්තාකාර වලල්ලේ කේන්ද්‍රය වේ.

8.3 විසඳූ නිදසුන්

උදාහරණ 1

සෘජුකෝණාස්‍රයක පැත්තක දිග අනෙක් පැත්තේ දිග මෙන් දෙගුණයක් වේ. දිග පැත්ත මත සමපාද ත්‍රිකෝණයක් නිර්මාණය කර ඇත. සෘජුකෝණාස්‍රයෙන් හා ත්‍රිකෝණයෙන් සෑදුන ආස්තරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න.



AB = a ලෙස ගන්න. එවිට AE = $2a$ වේ.

සමමිතියෙන් ආස්තරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය MCමත පිහිටමි.

M යනු AE හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයයි.

ABDE හි වර්ගඵලය $= 2a^2$

BCD හි වර්ගඵලය $= \sqrt{3}a^2$

ඒකක වර්ගඵලයක බර w ලෙස ගනිමු.

ආස්තරය	බර	ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට M සිට MC දිගේ ඇති දුර
ABDE	$2a^2w$	$\frac{a}{2}$
BDC	$\sqrt{3}a^2w$	$a+\frac{1}{3}\sqrt{3}a$
ABCDE	$\left(2+\sqrt{3}\right)a^2w$	$\bar{x}$

AEවටා ඝූර්ණය ගැනීමෙන්

$$\left(2+\sqrt{3}\right)a^2w\ \bar{x} = 2a^2w\ \frac{a}{2}+\sqrt{3}a^2w\left(a+\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\ \bar{x} = a+\sqrt{3}a+a$$

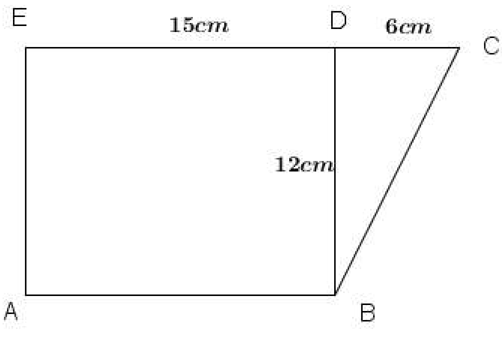
$$=\left(2+\sqrt{3}\right)a$$

$$\bar{x} = a$$

එබැවින් ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය N , BD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ.

උදාහරණ 2

ABCDE එහි ABDE සෘජුකෝණාස්‍රයක් BCD සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් වේ. ඒකාකාර ආස්තරයක් රූපයෙන් පෙන්වයි. ආස්තරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න. ආස්තරය Cහි නිදහසේ එල්ලා ඇති විට සිරස සමග CE සාදන කෝණය සොයන්න.



ABDE හි වර්ගඵලය = 15 x 12 = 180 cm^2

BCD හි වර්ගඵලය $= \frac{1}{2}\times 12\times 6 = 36\ cm^2$

ඒකක වර්ගඵලයක බර w ලෙස ගනිමු

ආස්තරය	බර	ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට බර	
		AE සිට	AB සිට
ABDE	$180w$	$\frac{15}{2}$ cm	6 cm
BCD	$36w$	$15+\frac{1}{3}\times 6 = 17$ cm	$\frac{2}{3}\times 12 = 8$ cm
ABCE	$216w$	$\bar{x}$	$\bar{y}$

AE වටා සූර්ණය ගැනීමෙන්

$$216w\,\bar{x} = 180w \times \frac{15}{2} + 36w \times 17$$
$$12\,\bar{x} = 75 + 34$$
$$= 109$$
$$\bar{x} = \frac{109}{12}\text{ cm}$$

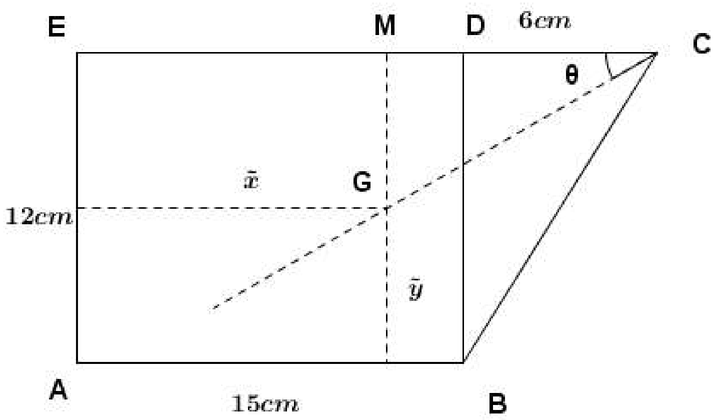
AB වටා සූර්ණය ගැනීමෙන්

$$216w\,\bar{y} = 180w \times 6 + 36w \times 8$$
$$12\,\bar{y} = 60 + 16$$
$$= 76$$
$$\bar{y} = \frac{19}{3}\text{ cm}$$

ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය AE සිට $\frac{19}{3}$ cm, AB සිට $\frac{109}{12}$ cm ක දුරකින් වේ.

ආස්තරය C වටා නිදහසේ එල්ලන විට CG සිරස් වේ.

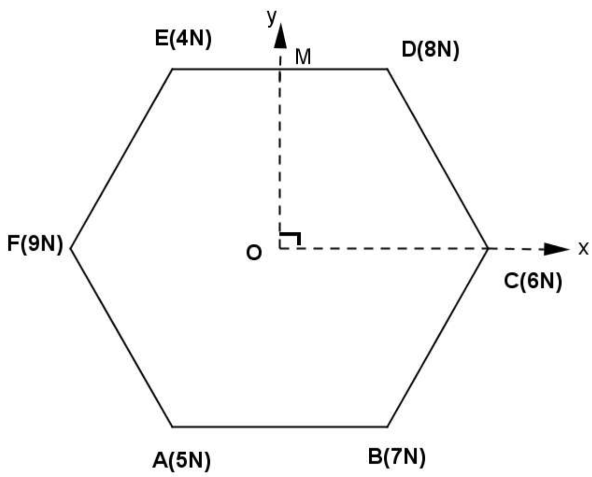
$$\tan\theta = \frac{MG}{CM}$$
$$= \frac{12-\bar{y}}{21-\bar{x}}$$
$$= \frac{12-\frac{19}{3}}{21-\frac{109}{12}}$$
$$= \frac{68}{143}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{68}{143}\right)$$



උදාහරණ 3

බර නිව්ටන් 5, 7, 6, 8, 4 සහ 9 බැගින් වූ අංශු ඒකාකාර ෂඩස්‍රයක කෝණික ලක්ෂ්‍යවල පිළිවෙළින් තබා ඇත. ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ෂඩස්‍රයේ කේන්ද්‍රය සමග සම්පාත වන බව පෙන්වන්න.

ෂඩස්‍රයේ පාදයක දිග $2a$ සහ ෂඩස්‍රයේ කේන්ද්‍රය O ලෙස ගන්න. තවදුරටත් OC රේඛාව X අක්ෂය ලෙස ද සහ OM රේඛාව y අක්ෂය ලෙස ද ගන්න.



$AB = 2a \Rightarrow OC = 2a = OD$

සහ $OM = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a$

ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංකය $(\bar{x}, \bar{y})$ ලෙස ගන්න.

OC වටා සූර්ණය ගැනීමෙන්

$$6.2a + 8.a + 7.a + 4.(-a) + 5.(-a) + 9.(-2a) = (6+8+7+4+5+9)\bar{x}$$
$$\bar{x} = \frac{27a - 27a}{39}$$
$$= 0$$

OM වටා ඝූර්ණය ගැනීමෙන්

$$8.a\sqrt{3}+4.a\sqrt{3}+6.0+9.0+5.(-a\sqrt{3})+7.(-a\sqrt{3})=(6+8+7+4+5+9)\overline{y}$$

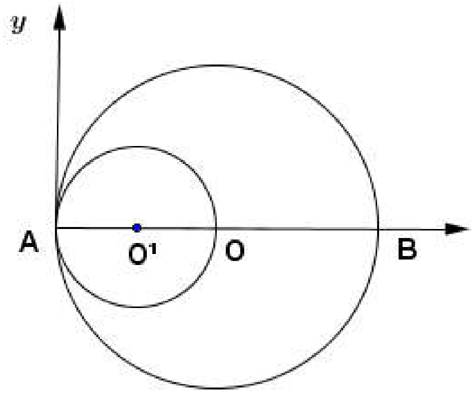
$$\overline{y}=\frac{12a\sqrt{3}-12a\sqrt{3}}{39}$$

$$=0$$

ෂඩස්‍රයේ කේන්ද්‍රය වන O ලක්ෂ්‍යය සමග ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සම්පාත වේ.

උදාහරණ 4

අරය r වන වෘත්තාකාර තැටියකින් එහි අරය විෂ්කම්භය වන පරිදි අරය $\frac{r}{2}$ වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක් කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. ශේෂයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න.



වෘත්තාකාර තැටියේ විෂ්කම්භය AB ලෙස ගනිමු O යනු එහි කේන්ද්‍රයයි.

AO විෂ්කම්භය වන පරිදි වූ තැටියේ කේන්ද්‍රය O′ ලෙස ද ඒකක වර්ගඵලයක බර w ලෙස ද ගනිමු.

විශාල වෘත්තාකාර තැටියේ බර $=\pi r^2 w$

කුඩා වෘත්තාකාර තැටියේ බර $=\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 w=\frac{1}{4}\pi r^2 w$

ශේෂයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G ලෙස ගනිමු

සමමිතිකත්වයෙන් ශේෂයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය AB මත වේ.

AYවටා ඝූර්ණය ගැනීමෙන්

$$\left(\pi r^2 w-\frac{\pi}{4}r^2 w\right)\mathrm{AG}=\pi r^2 w\times \mathrm{AO}-\frac{\pi}{4}r^2 w\times \mathrm{AO}^{|}$$

$$=\frac{\pi r^2 w.\,\mathrm{r}\ -\ \frac{\pi}{4}r^2 w.\frac{\mathrm{r}}{2}}{\frac{3}{4}\pi r^2 w}$$

$$=\frac{\frac{7}{8}r}{\frac{3}{4}}$$

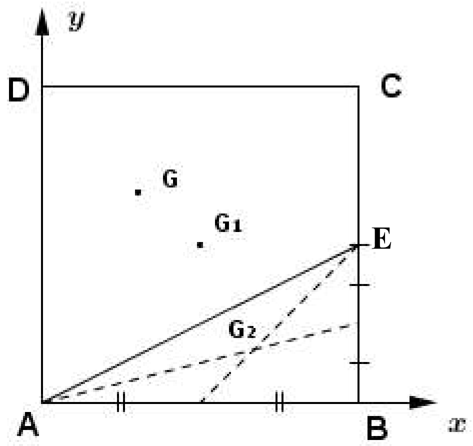
$$=\frac{7}{6}r$$

$$\mathrm{OG}=\frac{7}{6}r-r=\frac{r}{6}$$

එම නිසා ශේෂයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර මුල් තැටියේ කේන්ද්‍රයේ සිට විෂ්කම්භය දිගේ දුර $\frac{1}{6}r$ වේ.

උදාහරණ 5

ABCD යනු පැත්තක දිග $2a$ වූ සමචතුරස්‍රාකාර ආස්තරයකි E යනු BC පාදරයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයයි. A සිට AECD කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර සොයන්න.



AB සහ AD පිළිවෙළින් x, y අක්ෂද ඒකක වර්ගඵලයක බර w ලෙස ද ගනිමු.

ABCD ආස්තරයේ බර $4a^2w$ වේ.

ABE කොටසේ බර $\frac{1}{2}.2a^2w = a^2w$ වේ.

ABCD සහ ABE හි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයන් පිළිවෙළින් G_1,G_2 ලෙස ගනිමු. ABCD කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G ලෙස ද ගනිමු.

$G=(\bar{x},\bar{y})$ ලෙස ගනිමු

AD වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$(4a^2w - a^2w)\bar{x} = 4a^2w \times \mathrm{a} - a^2w \times \frac{2}{3}\times 2a$$

$$3a^2w\,\bar{x} = \frac{8}{3}a^3w$$

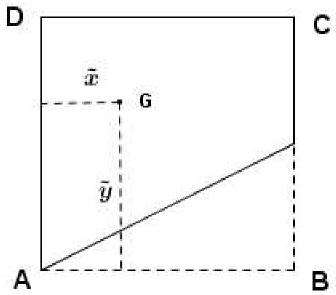
$$\bar{x} = \frac{8}{9}a$$

AB වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$(4a^2w - a^2w)\bar{y} = 4a^2w \times \mathrm{a} - a^2w \times \frac{1}{3}\times a$$

$$3a^2w\,\bar{y} = \frac{11}{3}a^3w$$

$$\bar{y} = \frac{11}{9}a$$



$$\mathrm{AG}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$$

$$= \left(\frac{8a}{9}\right)^2 + \left(\frac{11a}{9}\right)^2$$

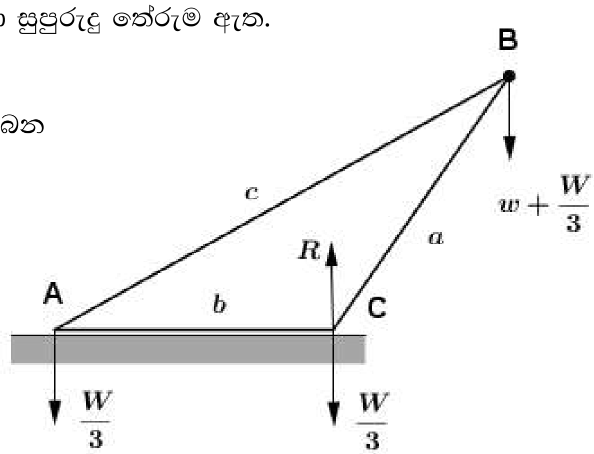
$$= \frac{\sqrt{185}}{9}a$$

උදාහරණ 6

A BC ඒකාකාර ත්‍රිකෝණාකාර ආස්තරයක් AC පාදය තිරස් මේසයක් සමග සම්බන්ධව C හි මහා කෝණයක් වන පරිදි සිරස් තලයක පිහිටුවා ඇත.

ආස්තරය නොපෙරළෙන පරිදි B ලක්ෂ්‍ය මත තැබිය හැකි උපරිම බර $\frac{1}{3}W\left(\frac{a^2+3b^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි w යනු ත්‍රිකෝණයේ බර වන අතර a, b, c සඳහා සුපුරුදු තේරුම ඇත.



ආස්තරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂ මත තබන සමාන බරවල ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයම වේ.

එබැවින් A, B, C ලක්ෂ්‍යවල බර $\frac{1}{3}W$ බැගින් වේ.

Bහි තැබිය හැකි විශාලතම බර w ලෙස ගනිමු. මෙම අවස්ථාවේදී ආස්තරය මත මේසය මගින් ඇති කරනු ලබන ප්‍රතික්‍රියාව C ලක්ෂ්‍ය හරහා ක්‍රියාකරයි.

ආස්තරයේ බර W යන්න A, B සහ C ලක්ෂ්‍ය මත තබන ලද බර $\frac{W}{3}$ බැගින් වන අංශු තුනක් ලෙස සැලකිය හැකිය. w බර වැඩිවන විට ආස්තරය C ලක්ෂ්‍ය වටා පෙරලීමට යොමුවේ. w වැඩිතම විට R ප්‍රතික්‍රියාව C හි ක්‍රියාකරයි.

ආස්තරයේ සමතුලිතතාවය සඳහා C වටා ඝූර්ණය ගැනීමෙන්,

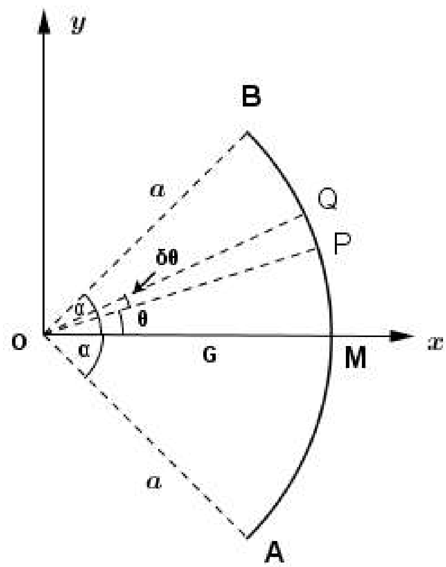
$$\left(w+\frac{W}{3}\right)a\cos(\pi-c)-\frac{W}{3}.b=0$$

$$\left(\frac{w+\frac{W}{3}}{\frac{W}{3}}\right)=\frac{b}{-a\cos c}=\frac{b}{-a\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}=\frac{2b^2}{c^2-a^2-b^2}$$

$$\frac{w}{\frac{W}{3}}=\frac{2b^2-(c^2-a^2-b^2)}{c^2-a^2-b^2}$$

$$w=\frac{W}{3}\left(\frac{3b^2+a^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}\right)$$

ඒකාකාර වෘත්ත චාපයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය



AB යනු වෘත්ත චාපයක් ලෙස ද O යනු අරය a වන වෘත්තයක කේන්ද්‍රයද ලෙස ගනිමු. AB, O කේන්ද්‍රයෙහි ආපාතනය කරන කෝණය 2α වේ.

P, Q යනු $P\hat{O}Q=\delta\theta$ එහි $M\hat{O}P=\theta$ වන පරිදි වූ යාබද ලක්ෂ්‍ය දෙකකි.

M යනු වෘත්ත චාපයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ලෙස ද, දිගක බර w ලෙස ද ගනිමු.

PQ කොටසේ බර $=a\,\delta\theta\,\mathrm{w}$

AB ඛණ්ඩයේ බර $=\int_{-\alpha}^{+\alpha}a\,d\theta\,\mathrm{w}$

PQ කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය O සිට $a\cos\theta$ දුරින් වේ.

සමමිතියෙන් AB චාපයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OM මත පිහිටයි. AB චාපයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G ලෙස ගනිමු. O වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\left[\int_{-\alpha}^{+\alpha}a\,d\theta\,w\right]\mathrm{OG}=\int_{-\alpha}^{+\alpha}a\,d\theta\,w\,.\,a\cos\theta$$

$$aw\int_{-\alpha}^{+\alpha}d\theta\,.\mathrm{OG}=a^2w\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\theta d\theta$$

$$aw[\theta]_{-\alpha}^{+\alpha}.\mathrm{OG}=a^2w[\sin\theta]_{-\alpha}^{+\alpha}$$

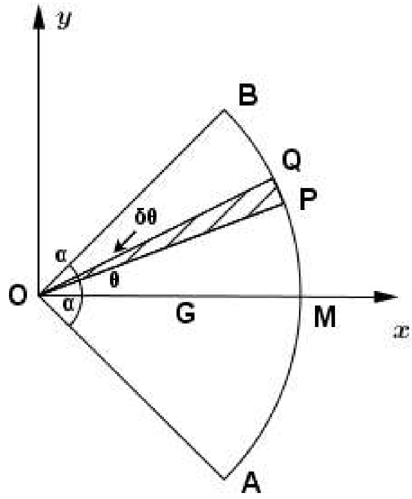
$$aw\,.\,2\alpha.\ \mathrm{OG}=a^2w\,.\,2\sin\alpha$$

ආපෝහනය :

$$\mathrm{OG}=\frac{a\sin\alpha}{\alpha}$$

$\alpha=\frac{\pi}{2}$ වන විට අර්ධ වෘත්ත චාපයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, $\mathrm{OG}=\frac{a\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2a}{\pi}$ වේ.

ඒකාකාර වෘත්තාකාර කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය



AOB යනු අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වන වෘත්තයක කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයකි.

AB චාපය O හිදී 2α කෝණයක් ආපතනය කරයි. ABහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය M වේ.

P, Q යනු $M\hat{O}P = \theta$ සහ $P\hat{O}Q = \delta\theta$ වන පරිදි AB චාපය මත යාබද ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. ඒකක වර්ගඵලයක බර m වේ.

POQ Δ බර $= \frac{1}{2}a^2\delta\theta\, m$

AOB කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ $= \int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{1}{2}a^2 d\theta\, m$

OPQ හි කේන්ද්‍රයට O සිට ඇති දුර $\frac{2}{3}a\cos\theta$ වේ.

සමමිතියෙන් කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G , OM මත පිහිටයි.

O වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\left[\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{1}{2}a^2 d\theta . m\right]\text{OG} = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{1}{2}a^2 d\theta . m . \frac{2}{3}a\cos\theta$$

$$\frac{ma^2}{2}\left[\theta\right]_{-\alpha}^{+\alpha} .\text{OG} = \frac{ma^3}{3}\left[\sin\theta\right]_{-\alpha}^{+\alpha}$$

$$\frac{ma^2}{2}\left[2\alpha\right].\text{OG} = \frac{ma^3}{3}.2\sin\alpha$$

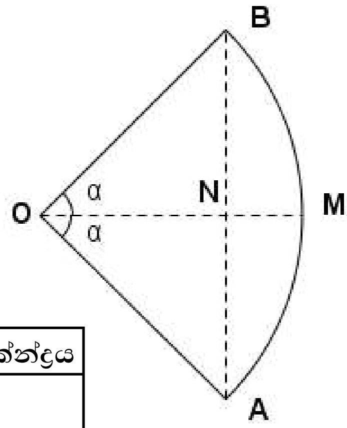
$$\text{OG} = \frac{2}{3}.a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

අපෝහනය :

අර්ධ වෘත්තාකාර තැටියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය

$$\alpha = \frac{\pi}{2},\ \text{OG} = \frac{2}{3}\frac{a\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a}{3\pi}$$

ඒකාකාර වෘත්ත ඛණ්ඩයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය



AMB යනු කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වන වෘත්ත ඛණ්ඩයකි.

සමමිතියෙන් වෘත්ත ඛණ්ඩයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G , OM මත පිහිටයි.

w - ඒකක වර්ගඵලයක බර

රූපය	බර	**O** සිට ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය
OAMB කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩය	$\frac{1}{2}a^2.2\alpha.w$	$\frac{2}{3}a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$
OAB ත්‍රිකෝණ	$\frac{1}{2}.2a\sin\alpha\ .a\cos\alpha.\ w$	$\frac{2}{3}a\cos\alpha$
AMB වෘත්ත ඛණ්ඩය	$a^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)w$	OG

O වටා සූර්ණය ගැනීමෙන්,

$$a^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)w\,.\,\text{OG} = \frac{1}{2}a^2\,.\,2\alpha\,.\,w\,.\,\frac{2}{3}a\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \frac{1}{2}\,.\,2a\sin\alpha\,.\,a\cos\alpha\,.\,w\,.\,\frac{2}{3}a\cos\alpha$$

$$(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)\,.\,\text{OG} = \frac{2}{3}a\sin\alpha - \frac{2}{3}a\sin\alpha\cos^2\alpha$$

$$= \frac{2}{3}a\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)$$

$$= \frac{2}{3}a\sin^3\alpha$$

$$\text{OG} = \frac{2a\sin^3\alpha}{3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}$$

අපෝහනය :

$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ වන විට, වෘත්ත ඛණ්ඩය අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයකට පත්වේ. $\text{OG} = \dfrac{4a}{3\pi}$

ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය

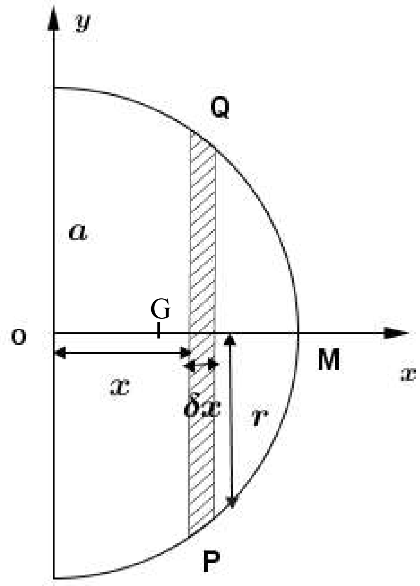
OM සමමිතික අක්ෂය ලෙස ද ගෝලයේ කේන්ද්‍රය O සහ අරය a ලෙස ගනිමු.

PQ යන්න ඝනකම δx වූ O සිට x දුරකින් පිහිටි වෘත්තාකාර තැටියකි.

ගෝලයේ ඝනත්වය w ලෙස ගනිමු.

PQ හි ස්කන්ධය $\text{PQ} = \pi r^2 \delta x.\text{w}$

PQ හි ස්කන්ධය $= \pi(a^2 - x^2)\delta x$ w හි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය O සිට x දුරකින් වේ.



$$\therefore \text{ අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධය } = \int_0^a \pi\left(a^2 - x^2\right)dx\ \text{w}$$

සමමිතිකත්වයෙන් අර්ධ ගෝලයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G , OM මත

O වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\left[\int_0^a \pi\left(a^2 - x^2\right)dx.wg\right]\text{OG} = \int \pi\left(a^2 - x^2\right)dx.w.xg$$

$$\pi w\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a \text{OG} = \pi w\left[\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a$$

$$\pi w \times \frac{2}{3}a^3.\ \text{OG} = \pi w.\ \frac{a^4}{4}$$

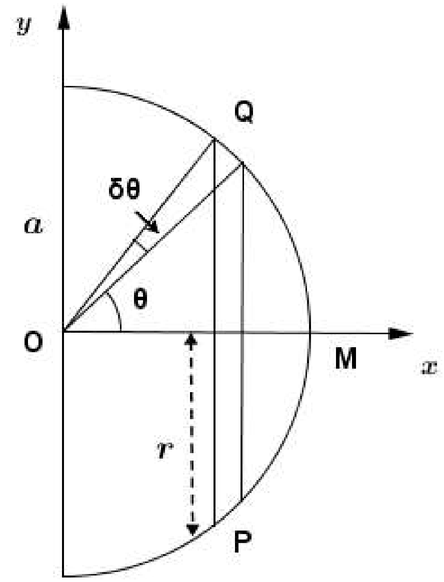
$$\text{OG} = \frac{3}{8}a$$

ඒකාකාර කුහර අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය

OM යනු සමමිතික අක්ෂය ද ගෝලයේ කේන්ද්‍රය O සහ අරය a ලෙස ද ගනිමු.

PQ යනු උස $a\,\delta\theta$ වන O සිට $a\cos\theta$ දුරකින් පිහිටි වෘත්තාකාර මුදුවකි.

ඒකක වර්ගඵලයක බර w ලෙස ද ගනිමු.



$$\text{PQ මුදුවේ බර } = (2\pi a\delta\theta)(a\delta\theta).w$$

PQ හි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය O සිට $a\cos\theta$ දුරින් වේ.

$$\therefore \text{ කුහර අර්ධ ගෝලයේ බර } = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a\sin\theta\; a\,d\theta\; w$$

සමමිතියෙන් අර්ධ ගෝලයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G , OM මත පිහිටයි.

O වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a\sin\theta\; a\,d\theta\; w\right] \text{OG} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a\sin\theta\; a\,d\theta\; wa\cos\theta$$

$$2\pi a^2 w\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta .\,\text{OG} = \pi a^3 w\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\, d\theta$$

$$2\pi a^2 w\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} .\text{OG} = \pi a^3 w\left[\frac{-\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$2\pi a^2 w\big[0\text{-}(\text{-}1)\big]\;.\text{OG} = \pi a^3 w$$

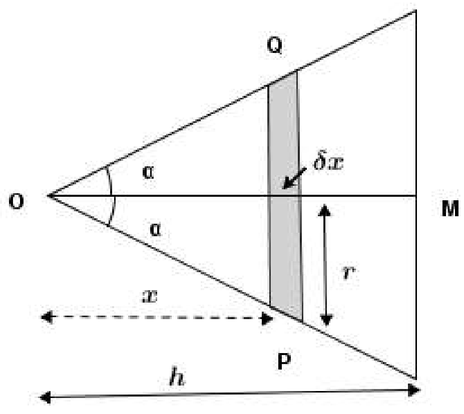
$$\text{OG} = \frac{a}{2}$$

ඒකාකාර ඝන කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය

කේතුවේ උස h ලෙස ද අර්ධ සිරස් කෝණය α ලෙස ගනිමු.

ඝනකම δx වන O ශීර්ෂයේ සිට x දුරකින් පිහිටි PQ වෘත්තාකාර තැටියක් සලකන්න.

කේතුවේ ඝණත්වය w ලෙස ගන්න.



$$\text{PQ හි බර } = \pi r^2 \delta x \text{ w g}$$

$$= \pi(x\tan\alpha)^2\,\delta x.\text{w g}$$

$$\text{කේතුවේ බර } = \int_0^h \pi x^2\tan^2\alpha .dx \text{ w.g}$$

PQ හි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය O සිට x දුරකින් වේ.

සමමිතියෙන් කේතුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G , OM මත පිහිටයි.

O වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$OG\ .\left[\int_0^h \pi x^2 \tan^2\alpha\ dx\ w\ g\right] = \int_0^h \pi x^2 \tan^2\alpha\ dx\ w.x\ g$$

$$OG\ .\left[\pi \tan^2\alpha\ w\int_0^h x^2 dx\right] = \pi \tan^2\alpha\ w\int_0^h x^3 dx$$

$$OG\ .\ \pi \tan^2\alpha\ w\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^h = \pi \tan^2\alpha\ w\left|\frac{x^4}{4}\right|_0^h$$

$$OG\ .\ \frac{\pi}{3}h^3 \tan^2\alpha\ w = \frac{\pi}{4}h^4 \tan^2\alpha\ w$$

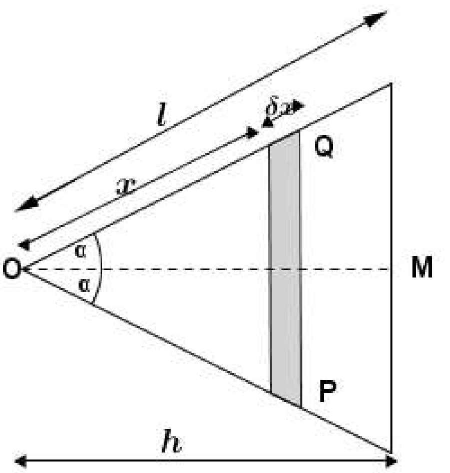
$$\therefore\ OG = \frac{3}{4}h$$

ඒකාකාර කුහර කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය

කේතුවේ උස h ලෙස ද අර්ධ සිරස් කෝණය α ලෙස ද ගනිමු.
උස δx වන $x\cos\alpha$ දුරකින් පිහිටි වෘත්තාකාර මුදුවක් සලකන්න.
ඒකක වර්ගඵලයක බර w ලෙස ගනිමු

PQ හි බර $= 2\pi\left(x\sin\alpha\right)\delta x.\mathrm{w}$

කේතුවේ බර $= \int_0^\ell 2\pi\left(x\sin\alpha\right)dx.\mathrm{w}$



සමමිතියෙන් කේතුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G, OM මත පිහිටයි.
O වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$OG\ .\left[\int_0^\ell 2\pi(x\sin\alpha)\ dx.w\right] = \int_0^\ell 2\pi x\sin\alpha\ dx\ .\ x\cos\alpha.w$$

$$OG.2\pi\sin\alpha.w\int_0^\ell x\ dx = 2\pi\sin\alpha\cos\alpha\int_0^\ell x^2 dx.w$$

$$OG.2\pi\sin\alpha.w\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^\ell = 2\pi\sin\alpha\cos\alpha.w\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^\ell$$

$$OG.\left[2\pi\sin\alpha\ w\ \frac{\ell^2}{2}\right] = 2\pi\sin\alpha\cos\alpha.w\frac{\ell^3}{3}$$

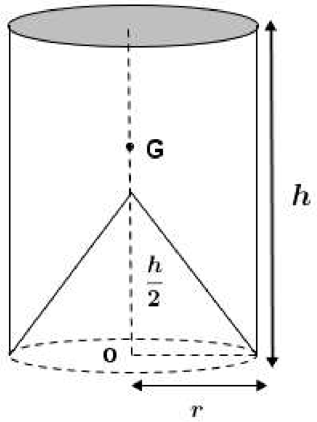
$$OG = \frac{2}{3}\ell\cos\alpha$$

$$OG = \frac{2}{3}h$$

උදාහරණ 7

අරය r සහ උස h වන වන ඒකාකාර සහ ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක් සිදුරු කර හැරීමෙන් අරය r සහ උස $\frac{h}{2}$ වන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක් ඉවත් කරනු ලබන්නේ කේතුවේ ආධාරකය සිලින්ඩරයේ එක් කෙලවරක් සමඟ සමපාත වන පරිදිය. ඉතිරිවන කොටසේ ගුරුත්වකේන්ද්‍රයට කේතුවේ ආධාරකයේ සිට අක්ෂය මත $\frac{23h}{40}$ ක දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

සමමිතියෙන් ශේෂයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය O හරහා යන අක්ෂය මත පිහිටයි.



රූපය	බර	**O** සිට ගුරුත්ව කේන්ද්‍රක ඇති දුර
සිලින්ඩරය	$\pi r^2 h\rho g$	$\frac{h}{2}$
කේතුව	$\frac{1}{3}\pi r^2 \frac{h}{2} pg$	$\frac{1}{4}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{8}$
ශේෂය	$\frac{5}{6}\pi r^2 h\rho g$	OG

O වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\frac{5}{6}\pi r^2 h\rho g.\text{OG} = \pi r^2 h\rho g\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}\pi r^2\left(\frac{h}{2}\right)\rho g.\left(\frac{h}{8}\right)$$

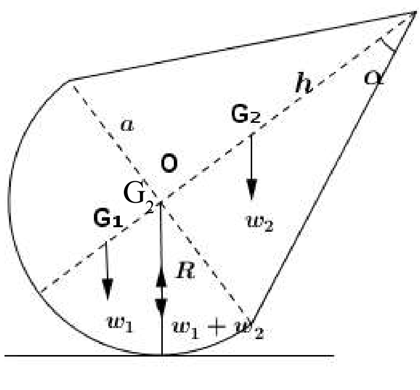
$$\frac{5}{6}.\text{OG} = \frac{h}{2} - \frac{h}{48} = \frac{23h}{48}$$

$$\text{OG} = \frac{23h}{40}$$

උදාහරණ 8

අර්ධ ගෝලයයත් අඩ සිරස් කෝණය α වන ඍජු වෘත්තාකාර අරයයන් a බැගින් වන අතර ඒවායේ පතුල සම්පාත වන පරිදි එකිනෙකට පාස්සා ඒකකාර ඝන දෘඪ වස්තුවක් සාදා ඇත. දෘඪ වස්තුව අර්ධ ගෝලයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ ඕනෑම ලක්ෂයක් තිරස් මේසයක් මත ස්පර්ශ වීමෙන් සමතුලිතතාවයේ පවතී නම් α හි අගය සොයන්න.

දෘඪ වස්තුව අර්ධ ගෝලයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ ඕනෑම ලක්ෂයක් තිරස් මේසය ස්පර්ශව ඇති විට සමතුලිතතාවන් පවතී. එවිට ස්පර්ශ ලක්ෂය හරහා ප්‍රතික්‍රියාව සහ මුළු වස්තුවේ බර $(w_1 + w_2)$ සමානව හා ප්‍රතිවිරුද්ධව එකම රේඛාවේ ක්‍රියා කරයි. එබැවින් සංයුක්ත වස්තුවේ ගුරුත්වකේන්ද්‍රය G හා අර්ධගෝලයේ ආධාරක තලයේ කේන්ද්‍රය වන O යන ලක්ෂ දෙක සමපාත වේ.



$$w_1.\,OG_1 - w_2.OG_2 = 0$$

$$\frac{2}{3}\pi a^3\rho.\frac{3}{8}a - \frac{1}{3}\pi a^2 h\rho.\frac{1}{4}h = 0$$

$$3a^2 = h^2$$

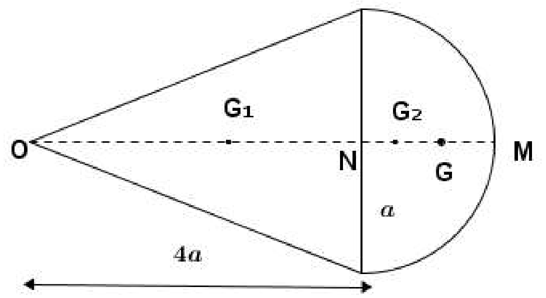
$$\frac{a}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

උදාහරණ 9

ඝණත්වය ρ ද පතුලේ අරය a ද, උස $4a$ ද වන ඒකාකාර ඝන ඍජුවෘත්ත කේතුවක් සහ ඝනත්වය $\lambda\rho$ ද පතුලේ අරය a ද වන ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක් ඒවායේ ආධාරක සම්පාත වන පරිදි එකට සම්බන්ධ කිරීමෙන් සෑදෙන සංයුක්ත වස්තුවෙන් සෙල්ලම් බඩුවක් සාදා ඇත. පොදු පතුලේ සිට සෙල්ලම් බඩුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රට ඇති දුර සොයන්න. සෙල්ලම් බඩුවට කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය සුමට තිරස් තලයක් හා ස්පර්ශව ස්ථායී සමතුලිතතාවයේ පැවතීමට නොහැකි නම් $\lambda > 20$ බව පෙන්වන්න.



සමමිතියෙන් සෙල්ලම් බඩුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G, OM මත පිහිටයි.

රූපය	බර	N සිට ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට ඇති දුර
කේතුව	$\frac{1}{3}\pi a^2.4a.\rho g$	$NG_1 = -\frac{1}{4}.4a = -a$
අර්ධ ගෝලය	$\frac{2}{3}\pi a^3.\lambda\rho g$	$NG_2 = \frac{3a}{8}$
සෙල්ලම් බඩුව	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho(2+\lambda)g$	NG

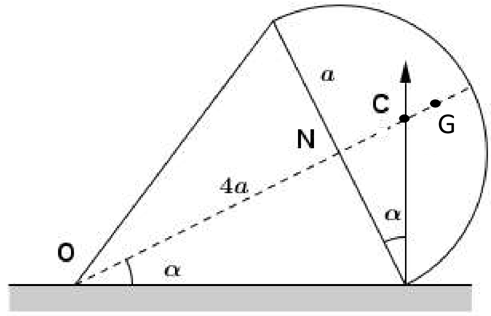
O වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$\frac{2}{3}\pi a^3\rho(2+\lambda)g \,.\, NG = \frac{4}{3}\pi a^3\rho g(-a) + \frac{2}{3}\pi a^3\lambda\rho\, g.\frac{3a}{8}$$

$$(2+\lambda).NG = -2a + \frac{3a}{8}\lambda$$

$$NG = \frac{(3\lambda - 16)}{8(2+\lambda)}a$$

සමතුලිතතාව ස්ථායී නොවීම සඳහා $NC < NG$



$$a\tan\alpha < \frac{(3\lambda-16)}{8(2+\lambda)}a$$

$$\frac{1}{4} < \frac{(3\lambda-16)}{8(2+\lambda)}$$

$$2(2+\lambda) < 3\lambda - 16$$

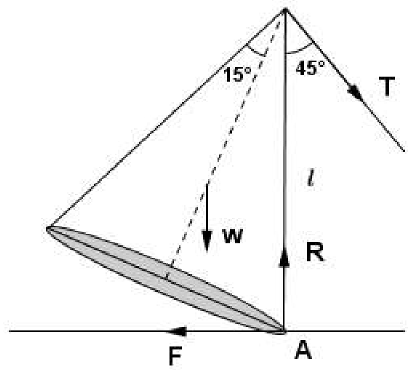
$$20 < \lambda$$

උදාහරණ 10

අර්ධ සිරස් කෝණය $15°$ වන ඒකාකාර ඝණ කේතුවක් එහි පතුල රළු තිරස් පොළොවක් මත නිශ්චලව පවතී. කේතුවේ ශීර්ෂයට ගැට ගසන ලද සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් කේතුවේ අක්ෂය හරහා යන සිරස් තලයේ තිරස සමග $45°$ ක කෝණයකින් යටි අතට ඇදීමෙන් ඇල කරනු ලැබේ. කේතුවේ ශීර්ෂය, කේතුව පොළොව සමග ස්පර්ශ වන ලක්ෂ්‍යයට සිරස්ව ඉහළින් පිහිටන විට කේතුවේ කෙළවර පොළොව මත ලිස්සා යාමට ආසන්න වේ. තන්තුවේ ආතතිය T අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව හා ඝර්ෂණ බලය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න. එමගින්

i. $T = \frac{3\sqrt{2}}{16}\text{W}$

ii. ඝර්ෂණ සංගුණකයේ අගය $\frac{3}{19}$ බව පෙන්වන්න.



කේතුවේ සමතුලිතතාවය සඳහා

A වටා ඝූර්ණය ගැනීමෙන්

A↺ $\quad \text{T}.\ell\sin 45° - W.\frac{3}{4}h\sin 15° = 0$

$$\text{T}.h\sec 15°.\sin 45° - W.\frac{3}{4}h\sin 15° = 0$$

$$\frac{\text{T}}{\sqrt{2}\cos 15°} = \frac{3}{4}W\sin 15°$$

$$\text{T} = \frac{3\sqrt{2}}{8}W\sin 30°$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{16}W$$

බල සිරස්ව විභේදනයෙන්,

$\uparrow$ R. Tcos 45° - W = 0

$$\text{R} = \frac{19}{16}W$$

බල තිරස්ව විභේදනයෙන්

$\leftarrow \quad$ F - Tsin 45° = 0

$$\text{F} = \frac{3}{16}W$$

සීමාකාරී සමතුලිතතාවය සඳහා

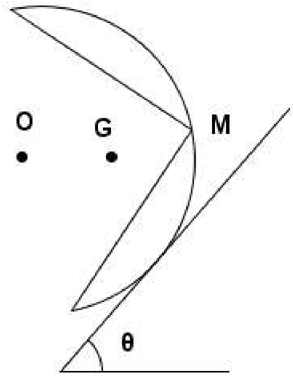
$$\frac{\text{F}}{\text{R}} = \mu$$

$$\mu = \frac{\frac{3}{16}W}{\frac{19}{16}W}$$

$$= \frac{3}{19}$$

උදාහරණ 11

අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයකින් පතුලේ අරය a සහ උස a වන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක් ඉවත් කරමින් ඝන වස්තුවක් සාදා ඇත. අර්ධ ගෝලයේ සහ කේතුවේ තල ආධාරක සමපාත වන අතර දෙකෙහිම පොදු උස h වූ ඍජුවෘත්තාකාර කේතුවක ස්තරය ස්කන්ධ කෝණය ශීර්ෂයේ සිට $\frac{3}{4}h$ දුරකින් ඇතැයි උපකල්පනය කර කේන්ද්‍රය O වේ. O සිට ඝන වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G ට ඇති දුර සොයන්න.



ඝන වස්තුව එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ ලක්ෂ්‍යයක්, තිරස සමග θ කෝණයක් සාදමින් ආනතව පවතින රළු තලයක් හා ස්පර්ශව සමතුලිතතාවයේ පවතී. ඝන වස්තුවේ හරස්කඩක් රූපයෙන් පෙන්වයි. O සහ G තලයේ වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව ඔස්සේ එකම සිරස් තලයක පිහිටයි. OG තිරස් බව දී ඇත. $\theta = 30^0$ බව පෙන්වන්න. අර්ධ ගෝලයේ බර W බව දී ඇත.

ස්පර්ශ ලක්ෂයේ දී ඝර්ෂණ බලයේ හා දී අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාවේ අගයන් W ඇසුරින් ලබා ගන්න.

තලය සහ ඝන වස්තුව අතර ඝර්ෂණ සංගුණකයේ කුඩාතම අගය සොයන්න.

සමමිතියෙන් ශේෂයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේතුවේ අක්ෂ්‍ය මත පිහිටයි.

ඒකක පරිමාවක ස්කන්ධය P ලෙස ගනිමු.

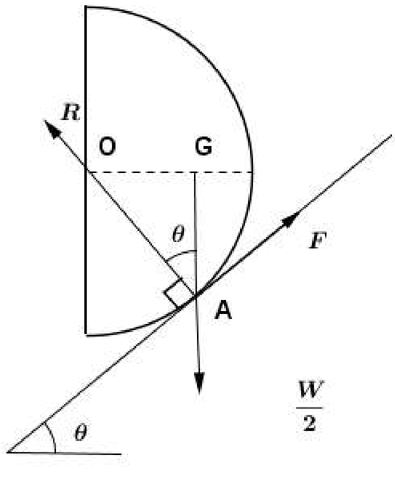
රූපය	ස්කන්ධය	**O** සිට ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට ඇති දුර
අර්ධ ගෝලය	$\frac{2}{3}\pi a^3 \mathrm{p}$	$\frac{3}{8}a$
කේතුව	$\frac{1}{3}\pi a^2 .a\mathrm{p}$	$\frac{1}{4}a$
ශේෂය	$\frac{1}{3}\pi a^3 \mathrm{p}$	OG

O වටා ඝූර්ණය ගැනීමෙන්,

$$\frac{1}{3}\pi a^3 pg.\mathrm{OG} = \frac{2}{3}\pi a^3 pg.\frac{3}{8}a - \frac{1}{3}\pi a^3 pg.\frac{1}{4}a$$

$$\mathrm{OG} = \frac{6}{8}a - \frac{1}{4}a$$

$$= \frac{a}{2}$$



අර්ධ ගෝලයේ බර $W = \frac{2}{3}\pi a^3 p$

ඝන වස්තුවේ බර $= \frac{W}{2}$

ඝනයෙහි සමතුලිතතාවය සඳහා

$\mathrm{F}, \mathrm{R}, \frac{\mathrm{W}}{2}$ බල තුනෙහි ක්‍රියාරේඛා A හරහා යා යුතුය.

$$\therefore \sin\theta = \frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OA}}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}}{a}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\theta = 30°$$

තලයට සමාන්තරව බල විභේදනයෙන්,

$\nearrow$ $F - \frac{W}{2}\sin\theta = 0$

$$F = \frac{W}{2}\sin\theta$$

$$= \frac{W}{2}\sin 30^\circ$$

$$= \frac{W}{4}$$

තලයට ලම්භකව බල විභේදනයෙන්

$\nwarrow$ $R - \frac{W}{2}\cos\theta = 0$

$$R = \frac{W}{2}\cos\theta$$

$$= \frac{W}{2}\cos 30^\circ$$

$$= \frac{W\sqrt{3}}{4}$$

සමතුලිතතාවය සඳහා

$\frac{F}{R} \leq \mu$ විය යුතුයි

$$\frac{\frac{W}{4}}{\frac{W\sqrt{3}}{4}} \leq \mu$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \mu$$

$$\mu_{\min} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

උදාහරණ 12

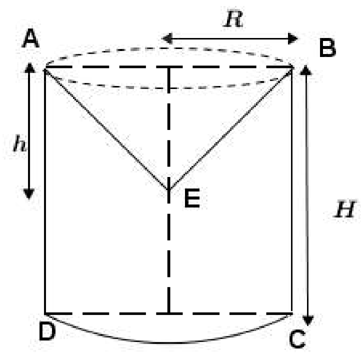
උස H සහ පතුලේ අරය R වන ABCD ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයකින් උස h සහ පතුලේ අරය R වන EAB ඝන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක් හාරා ඉවත් කිරීමෙන් පසුව ඉතිරි කොටස රූපයෙන් පෙන්වයි. එසේ හැරීමෙන් ලැබෙන S වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට AB සිට ඇති දුර සොයන්න. එමගින් S හි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය E හි ඇත්නම් $h = \left(2-\sqrt{2}\right)H$ බව පෙන්වන්න.

DC පතුල තිරස සමග $\alpha\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත රළු තලයක් මත පවතින පරිදි S වස්තුව තබා ඇත. S නොලිස්සීමට තලයේ රළු බව ප්‍රමාණවත්ය. S හි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය E හි ඇති බව උපකල්පනය කර $R\cos\alpha > \left(\sqrt{2}-1\right)H$ නම් S ඇද නොවැටෙන බව පෙන්වන්න.

වස්තුව සෑදී ඇති ද්‍රව්‍යයේ ඝනත්වය W වේ.

සමමිතියෙන් S හි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සිලින්ඩරයේ අක්ෂය මත පිහිටයි.

රූපය	බර	**AB** සිට ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට ඇති දුර
සිලින්ඩරය	$\pi R^2 HW$	$\frac{H}{2}$
කේතුව	$\frac{1}{3}\pi R^2 hW$	$\frac{h}{4}$
S වස්තුව	$\pi R^2\left(H - \frac{h}{3}\right)W$	$\bar{y}$

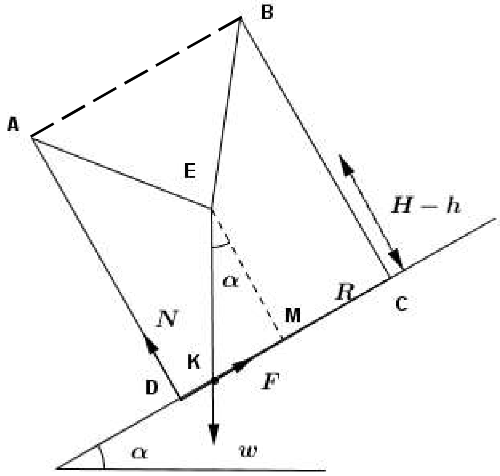


AB වටා ඝූර්ණය ගැනීමෙන්

$$\pi R^2\left(H - \frac{h}{3}\right)W\ \ \bar{y} = \pi R^2 H\, W.\ \frac{H}{2} - \frac{1}{3}\pi R^2 h W.\frac{1}{4}h$$

$$\left(H - \frac{h}{3}\right)\ \bar{y} = \frac{H^2}{2} - \frac{h^2}{12}$$

$$\bar{y} = \frac{6H^2 - h^2}{4(3H - h)}$$



ශේෂ වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය E මත නම් $\bar{y} = h$ වේ.

$$h = \frac{6H^2 - h^2}{4(3H\text{-}h)}$$

$$\Rightarrow 3h^2 - 12Hh + 6H^2 = 0$$

$$h^2 - 4Hh + 2H^2 = 0$$

$$(h - 2H)^2 - 2H^2 = 0$$

$$\left(h - 2H + \sqrt{2}H\right)\left(h - 2H - \sqrt{2}H\right) = 0$$

$$h = 2H - \sqrt{2}H\ ,\ \ 2H + \sqrt{2}H$$

$$\Rightarrow h < H \Rightarrow h = 2H - \sqrt{2}H$$

$$= \left(2 - \sqrt{2}\right)H$$

KM < DM නම්, වස්තුව නොඇදවැටේ.

$$(H - h)\tan\alpha < R$$

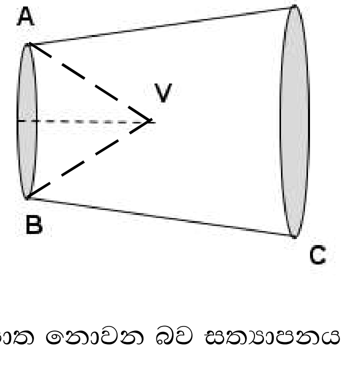
$$(H - h) < R\cot\alpha$$

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)H < R\cot\alpha$$

උදාහරණ 13

පහත රූපයෙන් දැක්වෙන ABCD ඒකාකාර ඝන වස්තුවෙන් නිරූපණය වන්නේ උස h වූ ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවකින් සාදන ලද ඝනත්වය ρ වූ ඡින්නකයකි. එහි වෘත්තාකාර තල මුහුණත්වල විෂ්කම්භයන් $AB = 2a\lambda$, සහ $CD = 2a$ වේ. මෙහි λ පරාමිතිකයක් සහ $0 < \lambda < 1$ වේ.

අනුකලනය භාවිතයෙන් එහි ස්කන්ධය $\frac{1}{3}\pi a^2 h\rho(1 + \lambda + \lambda^2)$ බව සහ එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, G ම කුඩා මුහුණතේ කේන්ද්‍රයේ සිට ඇති දුර $\frac{h}{4}\left(\frac{3 + 2\lambda + \lambda^2}{1 + \lambda + \lambda^2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

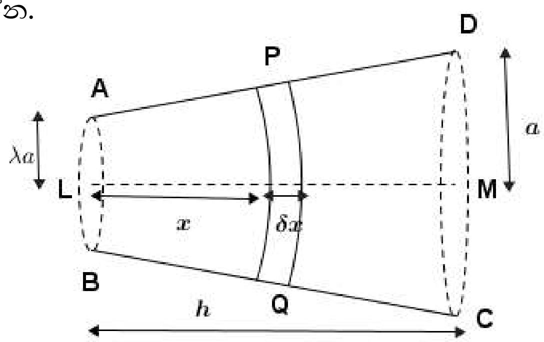


ආධාරකය අරය a සහ උස h වන ඒකාකාර ඍජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ස්කන්ධය සහ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම අපෝහනය කරන්න.

ABCD ඡින්නකයෙන් පාදයේ අරය λa සහ උස $\frac{h}{2}$ වන VAB ඍජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක් හාරා ඉවත් කිරීමෙන් J ඝන වස්තුව ලබාගෙන ඇත.

J වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G_1 හි පිහිටීම සොයා G_1, එය V සමග සම්පාත නොවන බව සත්‍යාපනය කරන්න.

J වස්තුව එහි විශාල මුහුණතේ පරිධියේ ලක්ෂ්‍යයකින් නිදහසේ එල්ලා ඇත. සමතුලිතතාවයේ දී J හි සමමිතික අක්ෂය සිරස සමග $\tan\beta = \frac{8a}{h}\left(\frac{2+2\lambda+\lambda^2}{4+8\lambda+5\lambda^2}\right)$ මගින් දෙනු ලබන β සුළු කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න.



$$\frac{x}{r-\lambda a} = \frac{h}{a(1-\lambda)}$$

$$r-\lambda a = \frac{a(1-\lambda)}{h}x$$

$$r = \frac{a(1-\lambda)}{h}x + \lambda a$$

උස δx වන AB සිට x දුරකින් පිහිටි PQ වෘත්තාකාර තැටිය සලකන්න.

PQ හි පරිමාව $= \pi r^2 \delta x$

PQ හි ස්කන්ධය $= \pi r^2 \delta x \rho$

ජින්නකයේ ස්කන්ධය $= \int_0^h \pi r^2 dx \rho$

$$\therefore \quad = \int_0^h \pi.\left[\frac{a(1-\lambda)x}{h} + \lambda a\right]^2 dx\rho = \pi\rho \left|\frac{\left[\frac{a(1-\lambda)x}{h} + \lambda a\right]^3}{3a\frac{(1-\lambda)}{h}}\right|_0^h$$

$$= \frac{\pi\rho}{3}\frac{h}{a(1-\lambda)}\left\{\left[a(1-\lambda)+\lambda a\right]^3 - (\lambda a)^3\right\}$$

$$= \frac{\pi\rho}{3}\frac{ha^3(1-\lambda^3)}{a(1-\lambda)} = \frac{\pi}{3}a^2 h\rho\frac{(1-\lambda^3)}{(1-\lambda)}$$

$$\mathrm{M} = \frac{\pi}{3}a^2 h(1+\lambda+\lambda^2)\rho ....(1)$$

සමමිතියෙන් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G යන්න LM මත පිහිටයි.

$$\mathrm{M.g\ LG} = \int \pi r^2 \delta x \rho . x$$

$$\mathrm{LG} = \frac{\int_0^h \pi\rho\left[\frac{a(1-\lambda)}{h}x + \lambda a\right]^2 x dx}{\mathrm{M}}$$

$$= \frac{\pi\rho}{\mathrm{M}}\int_0^h\left[\frac{a^2(1-\lambda)^2}{h^2}x^3 + \frac{2\lambda a^2}{h}(1-\lambda)x^2 + \lambda^2 a^2 x\right]dx$$

$$= \frac{\pi\rho}{\mathrm{M}}\left[\frac{a^2(1-\lambda)^2}{h^2}\frac{x^4}{4} + 2\lambda\frac{a^2}{h}(1-\lambda)\left(\frac{x^3}{3}\right) + \lambda^2 a^2\frac{x^2}{2}\right]_0^h$$

$$= \frac{\pi\rho}{\mathrm{M}}\left[\frac{a^2(1-\lambda)^2}{h^2}\frac{x^4}{4} + 2\lambda\frac{a^2}{h}(1-\lambda)\left(\frac{x^3}{3}\right) + \lambda^2 a^2\frac{x^2}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi\rho}{\mathrm{M}}h^2 a^2\left[\frac{(1-\lambda)^2}{4} + \frac{2}{3}\lambda(1-\lambda) + \frac{\lambda^2}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi a^2 h^2 \rho}{\mathrm{M}}\left[\frac{3(1-2\lambda+\lambda^2)+8\lambda+8\lambda^2+6\lambda^2}{4\times 3}\right]$$

$$= \frac{\pi a^2 h^2 \rho}{12M}\left(\lambda^2 + 2\lambda + 3\right)$$

$$= \frac{\pi a^2 h^2 \rho}{12} \frac{\left(\lambda^2 + 2\lambda + 3\right)}{\frac{\pi}{3} a^2 h \left(1 + \lambda + \lambda^2\right)\rho}$$

$$= \frac{h}{4}\left(\frac{\lambda^2 + 2\lambda + 3}{\lambda^2 + \lambda + 1}\right) \qquad \text{..........................(2)}$$

$\lambda = 0$ වන විට ජින්නකය උස h සහ පාදයේ අරය a වන කේතුවක් බවට පත්වේ.

$\therefore$ (1) න් $\lambda = 0$ විට කේතුවේ ස්කන්ධය $= \frac{1}{3}\pi a^2 h \rho$

ශිර්ෂයේ සිට කේතුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය $\frac{h}{4}.\frac{3}{1} = \frac{3h}{4}$ ක දුරින් පිහිටයි. (2) න්

J හි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සෙවීම

රූපය	බර	**AB** සිට ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට ඇති දුර
ABCD ජින්නකය	$\frac{1}{3}\pi a^2 \rho g(1+\lambda+\lambda^2)h$	$\frac{h}{4}\left(\frac{\lambda^2 + 2\lambda + 3}{\lambda^2 + \lambda + 1}\right)$
VAB කේතුව	$\frac{1}{3}\pi\left(\lambda a\right)^2 \rho g \frac{h}{2}$	$\frac{1}{4}.\frac{h}{2} = \frac{h}{8}$
ශේෂය	$\frac{1}{3}\pi a^2 h \rho g\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)$	$\bar{y}$

L වටා සූර්ණය ගැනීමෙන්

$$\frac{1}{3}\pi a^2 h \rho g\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)\bar{y} = \frac{1}{3}\pi a^2 \rho g\left(1 + \lambda + \lambda^2\right).\frac{h}{4}\left(\frac{\left(\lambda^2 + 2\lambda + 3\right)}{\lambda^2 + \lambda + 1}\right) - \frac{1}{3}\pi a^2 \lambda^2 \rho \frac{h}{2} g.\frac{h}{8}$$

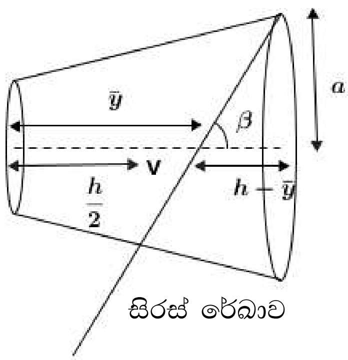
$$\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)\bar{y} = \frac{h}{4}\left(\lambda^2 + 2\lambda + 3\right) - \frac{h\lambda^2}{16}$$

$$\bar{y} = \frac{h}{8}\left(\frac{3\lambda^2 + 8\lambda + 12}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}\right)$$

$$\bar{y} - \frac{h}{2} = \frac{h}{8}\left(\frac{3\lambda^2 + 8\lambda + 12}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}\right) - \frac{h}{2}$$

$$= \frac{h}{8}\left[\frac{3\lambda^2 + 8\lambda + 12 - 4\left(\lambda^2 + 2\lambda + 2\right)}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}\right]$$

$$= \frac{h}{8}\left(\frac{4 - \lambda^2}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}\right) > 0 \qquad (\because 0<\lambda<1)$$



$\therefore$ V ලක්ෂ්‍ය G_1 සමග සම්පාත විය නොහැක.

$$\tan\beta = \frac{a}{h - \bar{y}}$$

$$h - \bar{y} = h - \frac{h}{8}\left(\frac{3\lambda^2 + 8\lambda + 12}{2 + 2\lambda + \lambda^2}\right)$$

$$= \frac{h}{8}\left(\frac{5\lambda^2 + 8\lambda + 4}{2 + 2\lambda + \lambda^2}\right)$$

$$\therefore \tan\beta = \frac{8a}{h}\left(\frac{2 + 2\lambda + \lambda^2}{4 + 8\lambda + 5\lambda^2}\right)$$

සිරස

8.4 අභ්‍යාසය

1. ABC ඒකාකාර ත්‍රිකෝණයෙන් ADE කොටසක් ඉවත් කිරීමෙන් සෑදෙන ADE ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයෙන් අඩකට සමාන වේ. මෙහි DE, BC ට සමාන්තර වේ. BCED කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට BC සිට දුර සොයන්න.

2. ABC ත්‍රිකෝණයෙන් DE, BCට සමාන්තර වන සේ ADE කොටස ඉවත් කරනු ලැබේ. a හා b යනු A සිට BCහා DEට පිළිවෙළින් ඇති ලම්බක දුර නම් ශේෂයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට BC සිට ඇති දුර $\dfrac{a^2+ab-2b^2}{3(a+b)}$ බව පෙන්වන්න.

3. දිග a, b, c වන දඬු තුනක් ත්‍රිකෝණයක් සෑදෙන පරිදි ඒවායේ කෙළවරවල්වලින් සන්ධි කර ඇත. ත්‍රිකෝණයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න.

4. ඒකාකාර ත්‍රිකෝණාකාර ABC තහඩුවකින් අන්තර් වෘත්තාකාර වර්ගඵලය සහිත කොටස ඉවත් කර ඇත. ශේෂයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට BC සිට ඇති දුර $\dfrac{S}{3as}\left[\dfrac{2s^3-3\pi aS}{s^2-\pi S}\right]$ බව පෙන්වන්න. මෙහි S යනු තහඩුවේ වර්ගඵලය වන අතර s යනු තහඩුවේ අර්ධ පරිමිතිය සහ BC = a වේ.

5. ACB යනු AOB විෂ්කම්භය සහ AB ට ලම්බක OC අරය සහිත ඒකාකර අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයකි. OB මත P සහ OP දිග $\frac{1}{2}a$ වන පරිදි OPQR සමචතුරස්‍රාකාර කොටසක් ආස්තරයෙන් කපා ඉවත් කර ඇත. ඉතිරි කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට OA සහ OC සිට ඇති දුර සොයන්න. ඉතිරි කොටස A හිදී නිදහසේ එල්ලා සමතුලිතතාවයේ පවතී නම් AB සිරස සමග සාදන කෝණයේ ටැංජනය හරියටම $\frac{1}{2}$ ට වඩා අඩු බව පෙන්වන්න.

6. ABCDEF යනු සිහින් කාඩ්බෝඩ් කැබැල්ලකින් සාදන ලද ඒකාකාර ෂඩස්‍රයකි. ABC ත්‍රිකෝණය කපා ඉවත් කර DEF ත්‍රිකෝණය මත තැබීමෙන් මුළු පද්ධතියේම ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය $\frac{2a}{9}$ දුරක් ගමන් කරන බව ඔප්පු කරන්න. මෙහි a යනු ෂඩස්‍රයේ පාදයක දිග වේ.

7. අරය a වන ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට එහි කේන්ද්‍රයේ සිට ඇති දුර $\frac{4a}{3\pi}$ බව ඔප්පු කරන්න.
AOB අරය $2a$ වන ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක පාදම වේ. O එහි කේන්ද්‍රය වේ. පාදම AO සහ අරය a වන අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක් කපා ඉවත් කර ශේෂය A වලින් නිදහසේ එල්ලා ඇත. සමතුලිතතාවයේ දී අර්ධ AOB හි සිරසට ආනතිය සොයන්න.

8. එකම ප්‍රමාණයේ පතුලවල් සහිත ඝන සිලින්ඩරයක් සහ ඍජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක් ඒවායේ පතුලවල්වලින් එකට සම්බන්ධ කර ඇත. සංයුක්ත ඝනයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය පොදු පාදයේ පිහිටන පරිදි කේතුවේ උස සිලින්ඩරයේ උසට දරන අනුපාතය සොයන්න.

9. ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක පතුල හාරා ඉවත් කර ඝන වස්තුවක් සාදා ඇත. එමඟින් එකම පතුල සහිත ඍජු වෘත්තාකාර කුහර කේතුවක් සෑදී ඇත. ශේෂයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කුහර කේතුවේ ශීර්ෂය සමඟ සම්පාත වීමට කොපමණ ප්‍රමාණයක් සාදා ඉවත් කළ යුතුද?

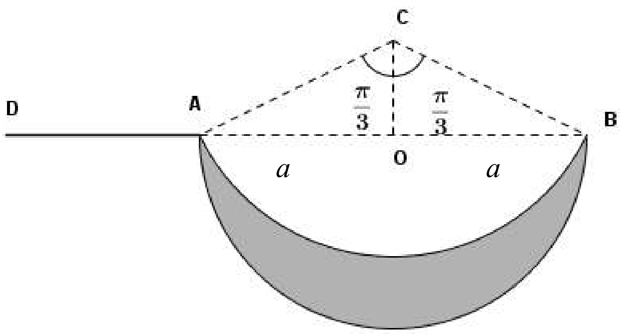
10. සිරස් කෝණය 60°වන ඒකාකාර ඍජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවකින් උපරිම විශාලත්වයක් ඇති ගෝලය ශේෂයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයයක් කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. මගින් අක්ෂය 11 : 49 අනුපාතයට බෙදෙන බව පෙන්වන්න.

11. උස h වූ ඍජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක් එහි $\frac{1}{2}h$ උසකදී අක්ෂයට ලම්භක තලයකින් කපා ඇත. කේතුවේ පාදය සහ කැපුම අතර කොටස් ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න.

12. කුහර වස්තුවක් සාදා ඇත්තේ පෘෂ්ඨ ඝනත්වය ρ වන කුහර කේතුවක් සහ පාදම පෘෂ්ඨ ඝනත්වය σ වන කුහර අර්ධ ගෝලයක සමපාත වන පරිදිය. සංයුක්ත කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වක්‍ර දාරය ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් තල පෘෂ්ඨයක ස්පර්ශ කරමින් සමතුලිත ඡේදන පිහිටයි නම් කේතුව අර්ධ ශීර්ෂ කේතුවන වන a $\rho\left(\cot^{2} \alpha+3\right)=3\sigma\left(\cos\alpha-2\sin\alpha\right)$ මගින් දෙන බව පෙන්වන්න.

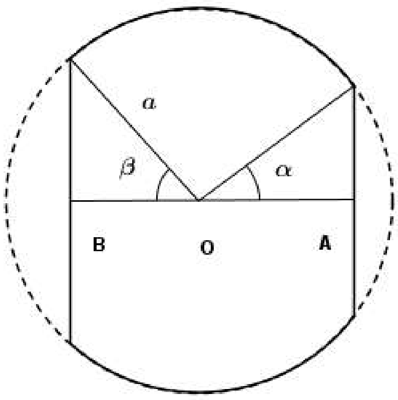
13. වෘත්තාකාර පාදම ඉවත් කරන ලද කුහර කේතුවක ශීර්ෂය O ද අඩ සිරස් කෝණය α ද උස h වන අතර කේතුව සාදා ඇති ද්‍රව්‍ය වර්ග ඒකකයක ඝනත්වය σ ද වේ නම් කේතුවේ ස්කන්ධය $\pi\sigma h^{2}\sec\alpha\tan\alpha$ බව පෙන්වා ස්කන්ධය කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න. එම ද්‍රව්‍යයේන්ම සාදා ඇති අරය $h\tan\alpha$ වන වෘත්තාකාර තැටියක කේන්ද්‍රය වේ. මෙම වෘත්තාකාර තැටිය ඉහත කුහර කේතුවේ වෘත්තාකාර පාදමට අලවා සංයුක්ත වස්තුවක් සාදා ඇත. O සිට සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\dfrac{h\left(\frac{2}{3}\sec\alpha+\tan\alpha\right)}{\sec\alpha+\tan\alpha}$ බව පෙන්වන්න.
සංයුක්ත වස්තුව පාදමේ ඇති ගැට්ටේ A ලක්ෂ්‍යයකින් එලූ විටට AO සහ AB යටි සිරස සමග සමාන කෝණ සාදයි නම් $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.

14. කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වන අර්ධ වෘත්තයකින් ද කේන්ද්‍රය C හි $\frac{2\pi}{3}$ ක කෝණයක් ආපාතනය කරන වෘත්ත චාපයකින් වට වී ඇති ළසඳ හැඩැති ඒකාකාර ආස්තරයක් රූපයේ පෙන්වා ඇත. මෙම ආස්තරයයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය C සිට ka දුරකින් ඇති බව පෙන්වන්න. මෙහි $k=\dfrac{3\sqrt{3}\pi}{\pi+6\sqrt{3}}$



ආස්තරයේ ස්කන්ධය M ලෙස ගන්න. දික් කරන ලද BA රේඛාව දිගේ ළසඳේ A කෙළවරෙහි දී දිග $2a$ සහ ස්කන්ධය m වන ඒකාකර ඍජු සිහින් AD දණ්ඩක් දෘඪව සවි කිරීමෙන් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි දැකැත්තක් සාදා ඇත. දැන් දැකැත්ත තිරස් පොළොව මත තලය සිරස් වන සේ තබා ඇත. දණ්ඩේ නිදහස් D කෙළවරත් අර්ධ වෘත්තයත් පොළොව සමග ස්පර්ශ වන සේ සමතුලිතතාව පැවතීමට $M\left(\sqrt{3}k-1\right)<4\sqrt{6}\,m$ විය යුතු බව පෙන්වන්න.

15. අරය a කේන්ද්‍රය O සහ මතුපිට ඝනත්වය σ වන ඒකාකාර ගෝලීය කබොලකින් O සිට $a\cos\alpha, a\cos\beta$ දුරවලින් (O ට දෙපසින්) සමාන්තර තල දෙකක් කැපීමෙන් ලද කලාපයක් රූපයේ දක්වා ඇත. මෙහි $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ වේ.



අනුකලනය භාවිතයෙන්,

(i) කලාපයේ ස්කන්ධය $2\pi a^2\sigma(\cos\alpha+\cos\beta)$

(ii) කලාපයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත එහි A, B දෙකෙළවර අතර හරි මැද පිහිටන බව පෙන්වන්න. මින් A කලාපයේ O සිට $a\cos\alpha$ දුරකින් වෙයි.

ඝනත්වය σ වන අරය $a\sin\beta$ වන ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක් ඉහත කුහර වස්තුවේ විශාල වෘත්තාකාර දාරයට අලවා සංයුක්ත වස්තුවක් සාදා ඇත. එම වෘත්තාකාර තැටියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය Bමත පිහිටයි නම් සංයුක්තයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සොයා සංයුක්තයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය තිරස් බිමක් මත තැබූ විට ඕනෑම පිහිටීමකදී සමතුලිත වෙයි නම් $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos\beta}$ බව පෙන්වන්න.

16. අරය a සහ පෘෂ්ඨික ඝනත්වය σ වන ඒකාකර කුහර අර්ධ ගෝලීය කේන්ද්‍රයේ සිට $a\cos\alpha$ දුරකින් වක්‍ර පෘෂ්ඨයට සමාන්තරව තලයක් කැපීමෙන් කුහර වස්තුවක් සාදා ඇත. එම කාපා ඉවත් කරන ලද මුහුණතෙහි කේතය නම් එම කුහර වස්තුවේ ගුරුත්ව කේතය OC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිහිටින බව පෙන්වන්න.

ඉහත කුහර වස්තුවට අරය $a\sin a$ සහ ඝනත්වය s වන වෘත්තාකාර තැටියක් ඇලවීමෙන් පත්‍රදයක් සාදා ඇත. එම සංයුක්ත වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC මත සිට $\left[\frac{1+\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha-\cos^2\alpha}\right]a\cos\alpha$ දුරකින් පිහිටවන බව පෙන්වන්න.

$\alpha=\frac{\pi}{3}$ ද එම කුහර වස්තුවේ බර w ද නම් ද එම වස්තුවට බර W ද දිග b වන AB දණ්ඩක් දෘඪ ලෙස ඉහත වස්තුවේ ගැටිනේ දාරයට සවි කිරීමෙන් සාදා ඇත. දිග b හා බර $\frac{w}{4}$ O, A සහ B විකර්ණය වේ. සංයුක්තයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න.

එම B ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලූ විට දණ්ඩ යටි සිරස සමග $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$ කෝණයක් සාදමින් සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. $3b=4a$ බව පෙන්වන්න.